RÉCURRENCE

I) Raisonnement par récurrence simple

Théorème : (principe du raisonnement par récurrence)

Langage mathématique	Langue française
Si : • $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \wp(n_0)$ (initialisation) • $\forall n \geqslant n_0, (\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$ (hérédité) Alors : $\forall n \geqslant n_0, \wp(n)$	Si : • La propriété est vraie à partir d'un certain rang n_0 • Pour tout rang n plus grand que n_0, la propriété au rang n entraîne la propriété au rang $n+1$. Alors : La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Démonstration

E est l'ensemble des entiers pour lesquels la propriété n'est pas définie.

Considérons l'ensemble : $E = \{n \geqslant n_0 : \text{non } \wp(n)\}$

Raisonnons par l'absurde : supposons E non vide.

Comme E est non vide et minoré (par n_0), il admet un plus petit élément m avec $m \geqslant n_0$.

Ce plus petit élément m est élément de E. On a donc non $\wp(m)$.

- Si $m = n_0$, alors non $\wp(n_0)$, ce qui contredit l'hypothèse d'initialisation.
- Si $m > n_0$, alors on a : $\wp(m-1)$ et non $\wp(m)$ ce qui contredit l'hypothèse d'hérédité.

Donc E est vide, autrement dit : $\forall n \geqslant n_0, \wp(n)$

Exemples :

1) On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$ (Somme des n premiers nombres impairs)

Démontrer que : $u_n = n^2$

Remarque : ce résultat se démontre également à l'aide de la formule $S = \dfrac{N(P+D)}{2}$

2) Démontrer que : $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

3) Démontrer que : $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4) Démontrer que : $\forall x \in \,]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (inégalité de Bernoulli)

5) Démontrer que : $$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

7) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} : (1 - x)(1 + x + ... + x^n) = 1 - x^{n+1}$.

8) Soit $a \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} : x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1}).$$

9) Démontrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $|\sin(nu)| \leqslant n\,|\sin u|$

<u>Solutions</u> :

1) On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \ n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1}(2k-1)$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

  On a : $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1$$

  Et d'après $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + 2n + 1$$

  D'où : $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

  On a donc bien montré que : $\forall n \geqslant 1, \ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1)$ et ($\forall n \geqslant 1, \ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n), \forall n \geqslant 1$:

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

2) On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

- On a $\wp(1)$ (c'est l'égalité triviale $a_1^2 = a_1^2$) et $\wp(2)$ (c'est la célèbre identité : $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$)
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 2$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\wp(n)$: $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$

On a : $$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}^2$$

D'après $\wp(n)$: $$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}^2$$

Tenant compte des conditions : $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$ et $j \in [\![i+1\,;\,n]\!]$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j + 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2a_n a_{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j + a_{n+1}a_i\right) + 2a_n a_{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n+1} a_i a_j + 2a_n a_{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1} a_i a_j$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_i a_j$$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que : $\forall n \geqslant 2,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1), \wp(2)$ et $(\forall n \geqslant 2,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$ donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \geqslant 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$

Exemple : $(n = 3)$ $\qquad (a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$

3) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^2 = \dfrac{1\times 2\times 3}{6}$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\qquad \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

  Et d'après $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

En factorisant par $(n+1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\left[(n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que : $\forall n \geqslant 1,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1)$ et $(\forall n \geqslant 1,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$ donc on a : $\wp(n), \forall n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^3 = \dfrac{1^2 \times 2^2}{4}$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

Et d'après $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

En factorisant par $(n+1)^2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Ce qui est $\wp(n+1)$

On a donc bien montré que : $\forall n \geqslant 1,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Bilan : on a $\wp(1)$ et $(\forall n \geqslant 1,\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$ donc on a : $\wp(n), \forall n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Et comme, on sait que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On a finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Autre méthode, sans récurrence : on considère un carré C de côté $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On définit A_1 par l'aire d'un carré de côté 1

Puis, pour tout $k \geqslant 2$, A_k par l'aire de "l'équerre de largeur k"

(Différence entre les aires des carrés de côté $\dfrac{k(k+1)}{2}$ et celui de côté $\dfrac{(k-1)k}{2}$)

On calcule l'aire de C de deux façons. D'une part, c'est $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

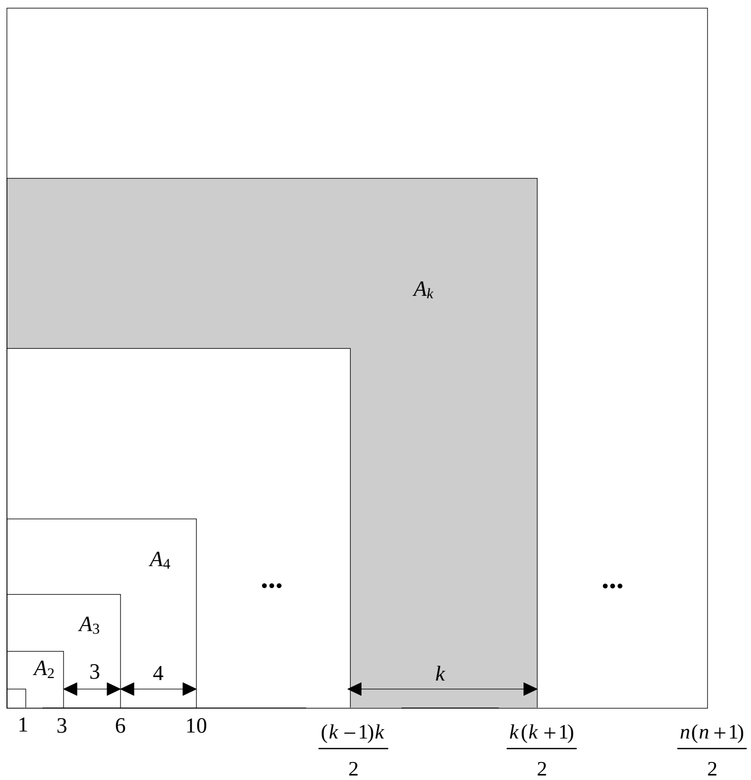
D'autre par, c'est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$ (Les équerres partitionnent C)

Or, pour $k \geqslant 2$:

$$A_k = \left(\sum_{\ell=1}^{k} \ell\right)^2 - \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 = k \times k^2 = k^3$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$



4) Soit $x \in \,]-1, +\infty[$. On considère la propriété la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : \ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Il s'agit de l'inégalité de Bernoulli.

- On a $\wp(0)$ puisque $(1 + x)^0 \geqslant 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  Or, $1 + x > 0$, donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x)$$

Or : $(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + n\,x^2 = 1 + (n + 1)x + n\,x^2$

Comme $n\,x^2 \geqslant 0$, on a : $(1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$

D'où : $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$) donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Remarque : lorsque $x \in \mathbb{R}_+$, cette inégalité se démontre également avec la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right) x^k$$

Or, la somme ne contient que des termes positifs (puisque $x > 0$). Donc :

$$(1+x)^n \geqslant \sum_{k=0}^{1} C_n^k x^k$$

Et comme $C_n^0 x^0 = 1$ et $C_n^1 x^1 = nx$, on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

5) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- On a $\wp(1)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Alors : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Et d'après $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

En réduisant au même dénominateur :

$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Bilan : on a $\wp(1)$ et ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$) donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Autre méthode</u> : en remarquant que $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, on obtient, par télescopage :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

6) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

- On a clairement $\wp(0)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

  On a alors : $\cos^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

  Or, $-\sin(A) = \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right)$

  Donc : $\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

7) Soit $x \in \mathbb{C}$. On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : (1 - x)(1 + x + ... + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

- On a clairement $\wp(0)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $(1 - x)(1 + x + ... + x^n) = 1 - x^{n+1}$

  On a : $(1 - x)(1 + x + ... + x^n + x^{n+1}) = (1 - x)\,(1 + x + ... + x^n) + (1 - x)x^{n+1}$

  D'après $\wp(n)$: $(1 - x)(1 + x + ... + x^n + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2} = 1 - x^{n+2}$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1 - x)(1 + x + ... + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

8) Soit $x \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$$

- On a clairement $\wp(0)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n) : x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$

On a :

$$(x - a)(x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n) = (x - a)x^n + (x - a)a(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$$

D'après $\wp(n)$:

$$(x - a)(x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n) = x^{n+1} - ax^n + a(x^n - a^n) = x^{n+1} - a^{n+1}$$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1))$ donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$$

9) Fixons $u \in \mathbb{R}$. On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : |\sin(nu)| \leqslant n|\sin u|$$

On a clairement $\wp(0)$ et $\wp(1)$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad \wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Comme

$$\sin[(n + 1)u] = \sin(nu)\cos u + \sin(u)\cos(nu)$$

$$|\sin[(n + 1)u]| \leqslant |\sin(nu)| + |\sin(u)|$$

Et d'après $\wp(n)$: $\qquad |\sin[(n + 1)u]| \leqslant n\,|\sin u| + |\sin(u)|$

D'où : $\qquad |\sin[(n + 1)u]| \leqslant (n + 1)\,|\sin(u)|$

Ce qui est $\wp(n + 1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1))$ donc on a : $\wp(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\sin(nu)| \leqslant n|\sin u|$$

II) Principe de récurrence "forte" (ou avec prédécesseurs)

Théorème : (principe de récurrence "forte")

Langage mathématique	Langue française
Si : • $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \wp(n_0)$ • $\forall n \geqslant n_0$, $(\wp(m)\ \forall m \in [\![n_0\,;n]\!] \Rightarrow \wp(n + 1))$ Alors : $\forall n \geqslant n_0,\ \wp(n)$	Si : • La propriété est vraie à partir d'un certain rang n_0 • Pour tout rang n plus grand que n_0, les propriétés des rangs compris entre n_0 et n entraînent la propriété au rang $n + 1$. Alors : La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Démonstration :

Le principe de récurrence "forte" se démontre à l'aide du principe de récurrence simple à l'aide d'une propriété Q bien adaptée :

$$Q(n) = \text{"}\wp(m),\ \forall m \in [\![n_0\ ;\ n]\!]\text{"} \quad \text{pour } n \geqslant n_0$$

- On a $Q(n_0)$ car $Q(n_0) = \wp(n_0)$.
- Montrons que pour tout $n \geqslant n_0$: $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

  Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $Q(n)$: $\wp(m),\ \forall m \in [\![n_0\ ;\ n]\!]$

  Par hypothèse, ceci entraîne $\wp(n+1)$.

  On a donc : $\wp(m),\ \forall m \in [\![n_0\ ;\ n+1]\!]$

  Ce qui est $Q(n+1)$.

D'après le principe de récurrence simple, on a donc :

$$Q(n),\ \forall n \geqslant n_0$$

C'est-à-dire : $\wp(m),\ \forall m \in [\![n_0\ ;\ n]\!]$