Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients complexes ou réels

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

On considère l'ensemble $E_{a,b} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définies par $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

($E_{a,b}$ est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants **fixés** dans $\mathbb{C}$)

Il est clair que : **$E_{a,b}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.**

De plus : $$\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}(E_{a,b}) = 2$$

En effet, il suffit de considérer l'application $\varphi : E_{a,b} \longrightarrow \mathbb{C}^2$
$u \longmapsto (u_0\,;\,u_1)$

φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. (En effet, φ est clairement linéaire et clairement bijective puisque toute suite u de $E_{a,b}$ est **caractérisée** par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1)

Or, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$ donc $\dim_{\mathbb{C}}(E_{a,b}) = 2$ également.

On peut donc construire une base (u, v) de $E_{a,b}$ en considérant $u = \varphi^{-1}((1\,;\,0))$ et $v = \varphi^{-1}((0\,;\,1))$. (Image réciproque par φ de la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$)

Recherchons les **suites géométriques éléments de $E_{a,b}$.**

Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \alpha^n$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$).

$$v \in E_{a,b} \Leftrightarrow \alpha^2 - a\,\alpha - b = 0$$

Notons λ_1 et λ_2 les deux racines complexes de l'équation caractéristique $r^2 - a\,r - b = 0$. (Elles existent car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos)

Ainsi : $$v \in E_{a,b} \Leftrightarrow v_n = (\lambda_1)^n \text{ ou } v_n = (\lambda_2)^n$$

On en déduit la forme générale (et explicite) des éléments de $E_{a,b}$:

- Si λ_1 et λ_2 sont distincts, on montre que les suites $\left(\lambda_1^n\right)$ et $\left(\lambda_2^n\right)$ sont indépendantes d'où :

$$u_n = A\left(\lambda_1^n\right) + B\left(\lambda_2^n\right) \quad \text{où } A, B \in \mathbb{C}$$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, on montre que les suites $\left(\lambda^n\right)$ et $\left(n\lambda^n\right)$ sont indépendantes d'où :

$$u_n = (An + B)\left(\lambda^n\right) \quad \text{où } A, B \in \mathbb{C}$$

Sous-cas spécial : $\lambda = 1$. La suite (u_n) est alors arithmétique.

Cas particulier : $a, b \in \mathbb{R}$. Mêmes résultats que précédemment (en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$) sauf dans le cas où λ_1 et λ_2 sont des racines complexes conjuguées distinctes : on pose dans ce cas :

$$f = \frac{\lambda^n + \overline{\lambda}^n}{2} = \mathrm{Re}\left(\lambda^n\right) \quad \text{et} \quad g = \frac{\lambda^n - \overline{\lambda}^n}{2\mathbf{i}} = \mathrm{Im}\left(\lambda^n\right)$$

On vérifie que f et g sont des suites (réelles) indépendantes de $E_{a,b}$.

En notant $\lambda = \rho\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, il vient donc :

$$u_n = A\,\rho^n\cos(n\theta) + B\,\rho^n\sin(n\theta) \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

Cas des suites linéaires du second ordre à coefficients constants avec "second membre constant"

Il s'agit des suites (u_n) définie par u_0, $u_1 \in \mathbb{C}$ puis par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n + c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{avec } c \neq 0.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad v_n = u_n + \lambda$

On a ainsi : $\qquad v_{n+2} = u_{n+2} + \lambda = a\, u_{n+1} + b\, u_n + c + \lambda = a(v_{n+1} - \lambda) + b(v_n - \lambda) + c + \lambda$

$$v_{n+2} = a\, v_{n+1} + b\, v_n - a\lambda - b\lambda + c + \lambda$$

Lorsque $a + b \neq 1$; il suffit de choisir $\qquad \lambda = \dfrac{c}{a+b-1}$

Ainsi, $\qquad v_{n+2} = a\, v_{n+1} + b\, v_n$

On applique alors ce qui précède pour expliciter (v_n) puis (u_n).

Lorsque $a + b = 1$, on calcule u_2 puis on procède ainsi :

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n + c$$

$$u_{n+3} = a\, u_{n+2} + b\, u_{n+1} + c$$

Par différence : $\qquad u_{n+3} = (a + 1)u_{n+2} + (b - a)u_{n+1} - bu_n$

Et comme $a + b = 1$: $\qquad u_{n+3} = (a + 1)u_{n+2} + (1 - 2a)u_{n+1} - (1 - a)u_n$

On est ainsi ramené à une récurrence linéaire d'ordre 3 d'équation caractéristique :

$$(\xi) : r^3 - (a + 1)r^2 + (2a - 1)r + 1 - a = 0$$

Il est clair que $r = 1$ est une racine de (ξ).

De plus, on a en dérivant : $3r^2 - 2(a + 1)r + 2a - 1 = 0$.

Donc l'ordre de multiplicité de la racine $r = 1$ dans (ξ) est au moins 2.

En effectuant le division euclidienne de $r^3 - (a + 1)r^2 + (2a - 1)r + 1 - a$ par $(r - 1)^2$, on obtient :

$$(\xi) : (r - 1)^2(r - b) = 0$$

On en déduit une expression de (u_n) :

Si $b \neq 1$: $\qquad u_n = (An + B) + Cb^n$

Si $b = 1$: $\qquad u_n = (An^2 + Bn + C)$

Autre approche :

La relation de récurrence $u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n + c$ s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

Si la suite (X_n) admet une limite Ω, on a nécessairement :

$$\Omega = A\Omega + B$$

$$(I - A)\Omega = B$$

Où : $\qquad I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1-a \end{pmatrix}$

Si $I - A$ est inversible, tout va bien. On retrouve la condition $a + b \neq 1$.

Dans, ce cas, en posant : $Y_n = X_n - \Omega$

On obtient une suite (Y_n) qui est géométrique. En effet :

$$Y_{n+1} = X_{n+1} - \Omega = A(Y_n + \Omega) + B - \Omega = AY_n$$

On en déduit : $Y_n = A^n Y_0 = A^n(X_0 - \Omega)$

D'où : $X_n = A^n(X_0 - \Omega) + \Omega$

Le calcul de X_n (et donc de u_n) se fait à l'aide des puissances de la matrice A et de Ω.