EXERCICES SUR LES SUITES

Exercice 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Étudier le sens de variation de cette suite.
2. Démontrer que cette suite est majorée par 2.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n}$.

1. Démontrer que $u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
2. Étudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Exercice 4

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n : $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

2. Application à l'étude de la convergence des suites géométrique.

   Soit (u_n) une suite géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$ définie par : $u_n = a^n$.

   a. On suppose $a > 1$ et on pose $a = 1 + x$. (On a donc $x > 0$)

      Démontrer, en utilisant l'inégalité de Bernoulli que : $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

   b. On suppose que : $0 < |a| < 1$. En posant $a' = \frac{1}{|a|}$, déduire à l'aide de a. que : $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

   c. On suppose $a < -1$. On pose $a'' = -a$. Démontrer qu'alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{2n+1} = -\infty$.

      Conclure.

   d. Examiner les cas $a = 0$ et $a = 1$ et $a = -1$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*.

Pour étudier cette suite, on lui associe la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x}$$

1. Représenter graphiquement la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on faire concernant sa convergence ?
2. Démontrer que f réalise une bijection de $[0\ ;\ 3]$ sur $[\frac{1}{2}\ ;\ 2]$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (v_n).

   c) En exprimant u_n en fonction de v_n, démontrer la conjecture faite au 1.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2x}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = x$.

1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

   a) Étudier le sens de variation de la fonction g.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que : $\frac{5}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{2}$.

2. Soit $I = [\frac{5}{4}\ ;\ \frac{3}{2}]$.

   a) Démontrer que $f(I) \subset I$.

   b) Démontrer que, pour tout réel x de I, on a : $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

   c) En déduire que, pour tout réel x de I, on a : $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{4}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$ et que la suite (u_n) converge vers α.

   c) Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer cette valeur approchée.

Exercice 7

Un client d'une banque dispose, au 1er janvier 2000, d'une somme de 1000 € qu'il dépose sur un compte.

La banque rémunère à 5% d'intérêts annuels toutes les sommes déposées et verse ces intérêts sur le compte tous les 31 décembre de chaque année.

De plus, le client décide de rajouter 950 € tous les 31 décembre de chaque année.

On désigne par u_n (n entier positif ou nul) la somme disponible après n années écoulées depuis le 1er janvier 2000, ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. Donner les résultats arrondis au centime d'euro près.
2. Établir, pour tout entier n positif ou nul, la relation :
$$u_{n+1} = 1{,}05\, u_n + 950$$
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n positif ou nul par :
$$v_n = u_n + 19000$$
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison q.
4. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
Quel sera le capital du client après 10 années écoulées depuis le 1er janvier 2000 ?

Exercice 8

Le 1er janvier 1999, une somme de 6500 euros est placée sur un compte dont le rendement annuel est de 4%.

On note P_n le montant de ce placement au 1er janvier de l'année $1999 + n$.

1. Que vaut P_0 ?
2. Calculer P_1 et P_2.
3. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
4. En déduire la nature de la suite (P_n) puis exprimer P_n en fonction de n.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $6500 \times 1{,}04^x \geqslant 9000$.
6. Au 1er janvier de quelle année ce placement aura-t-il atteint 9000 euros ?

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 9\mathbf{e} \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et la premier terme v_0.
2. Calculer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Étudier la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$.
3. Déterminer deux réels A et B tels que : $u_n = A \times 5^n + B$.
4. En déduire u_{10}.

Exercice 11

1. Démontrer, par récurrence, que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} C_k^2 = C_{n+1}^3$.
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$
   a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$: $u_n = C_n^2$
   b) Calculer (en fonction de n) la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 12

Démontrer : $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \text{sgn}((-1)^{n-1})(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$

Indication : soit une récurrence, soit un regroupement de termes par paquets de deux.

Exercice 13

1. On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 2(n+1) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

   Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

   Démontrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 + n + 1$

2. Voici un phénomène étrange :

$$\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{3 + \sqrt{1}} = 2 \quad \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}} = 3 \quad \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}} = 4 \quad \text{etc ...}$$

   On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{v_n + u_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

   Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$