Exercice 1 *Quelques résultats théoriques*

Démontrer que :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
3. Si une suite converge, alors sa limite est unique.
4. La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.
5. Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.
6. Toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire et a pour limite un entier relatif.
7. Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée.

Exercice 2 *Comportement asymptotique des suites géométriques*

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

2. Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

   - Si $a \in]1 ; +\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$)
   - Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
   - Si $a \in]-1 ; 1[$ alors (u_n) est convergente vers 0
   - Si $a \in]-\infty ; -1]$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 3 *Étude d'une suite récurrente*

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1. Étudier les variations de f.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

   c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

   d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 *Séries de Riemann*

On appelle "série" toute suite définie par une somme.

Les séries de Riemann sont les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Nous allons étudier le comportement de ces séries pour certaines valeurs entières de α.

0. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. (Quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{N}$)

1. Dans cette question, $\alpha = 1$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(Cette série porte encore le nom d"harmonique")

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + u_n$$

b. En déduire que (u_n) diverge.

2. Dans cette question, on suppose $\alpha = 2$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

a. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b. En déduire que (u_n) est majorée par 2.

Pour $\alpha = 2$, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \geqslant 3$.

Démontrer que (u_n) converge.

Exercice 5 *Suites de Héron*

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right)}{2x^2}$$

En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = E\left(\sqrt{a}\right) + 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leqslant u_0$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right)$$

c) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 *Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2*

Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n$

Exercice 7 *Moyenne arithmético-géométrique*

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = a \ ; \ b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Exercice 8 *Divergence des suites (cos n) et (sin n)*

Démontrer que les suites (sin n) et (cos n) divergent.

Exercice 9 *Étude d'une suite définie de façon implicite*

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynôme P_n, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$$

1. Étudier, pour tout $n \geqslant 2$, le sens de variation de P_n sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

   En déduire que, pour $n \geqslant 2$, P_n admet une unique racine α_n dans $]0, 1[$. (On donnera la valeur exacte de α_2)

2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$: $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

En déduire le sens de variation de la suite (α_n). La suite (α_n) converge-t-elle ?

3. a. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a :

$$P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

b. Justifier, pour tout $n \geqslant 2$, les inégalités suivantes :

$$\alpha_n < \alpha_2 < 1$$

$$0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$$

c. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n).

Exercice 10 *Étude d'une suite arithmético-géométrique. Passage à l'euro*

1. Chaque année, la grand-mère de Julien a déposé de l'argent dans une tirelire afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.

Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.

On note :

- u_n le montant, exprimé en francs, de la somme déposée dans la tirelire le 1er janvier de l'année 1982 + n. (Ainsi, $u_0 = 500$, $u_1 = 550$, ...)
- s_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la tirelire après le dépôt de l'année 1982 + n. (Ainsi, $s_0 = 500$, $s_1 = 1050$, ...)

a) Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer s_2, puis exprimer s_n en fonction de n.

c) Le 1er janvier 2002, la grand-mère de Julien effectue son dépôt habituel (en francs), puis offre la tirelire à Julien. Quel est le montant de la somme reçue par Julien ? Exprimer cette somme en francs, puis en euros. (Rappel : 1 euro correspond à 6,55957 francs)

2. Avec le cadeau de sa grand-mère, Julien décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

Le 1er janvier 2002, il effectue un placement de 3000 euros, à intérêts composés, au taux annuel de 4%. (À la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital).

De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200 euros.

On note :

- c_n le montant, exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Julien après n années de placement. (Ainsi $c_0 = 3000$)
- (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$)

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1{,}04\, c_n + 200$.

b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer u_n en fonction de n, puis c_n en fonction de n.

d) Combien d'années, au minimum, Julien devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire ?

Exercice 1 *Quelques résultats théoriques*

1. Notons ℓ la limite de la suite (u_n) et I l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$. I est bien un intervalle ouvert centré en ℓ.

   Comme (u_n) converge, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite (u_n) sont dans I. Autrement dit :

   $$n \geqslant N \Rightarrow \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

   - Si $N = 0$, alors c'est fini, (u_n) est bornée par les réels $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
   - Si $N \geqslant 1$, alors notons A l'ensemble $\{u_0, \ldots, u_{N-1}, \ell - 1, \ell + 1\}$, M le plus grand élément de A et m son plus petit élément. Ainsi (u_n) est bornée par les réels m et M.

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un rang N pour lequel :

   $$u_N > A$$

   Mais comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant N$, on aura :

   $$u_n \geqslant u_N > A$$

   Donc tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A, +\infty[$ à partir du rang N.

   Comme ceci est valable pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit bien que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < \ell_2$.

   Notons $d = \ell_2 - \ell_1$.

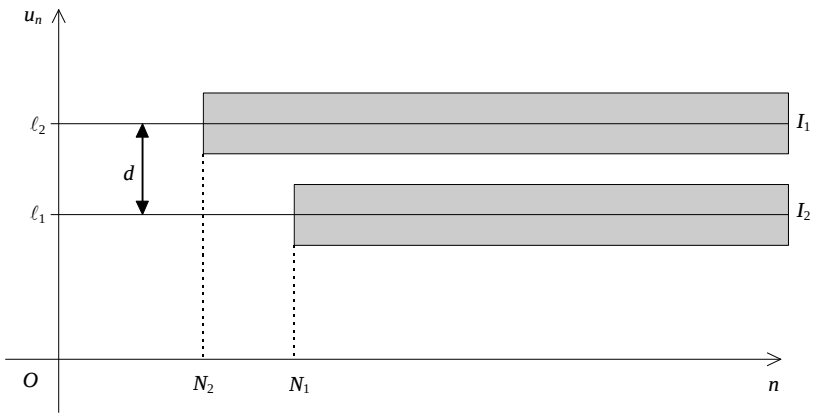
   Comme (u_n) converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang N_1, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{d}{3}$.

   De même, comme (u_n) converge vers ℓ_2, à partir d'un certain rang N_2, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\frac{d}{3}$.

   Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, tous les termes de la suite sont simultanément dans I_1 et I_2. Or ces deux intervalles sont disjoints (ils ne se chevauchent pas). Ce qui n'est pas possible.

   Ceci prouve l'unicité de la limite.

   Illustration :



Comment, à partir du rang N_1, tous les terme de la suite pourraient-ils se situer dans ces deux "tuyaux" ?

4. Supposons, au contraire, que la suite de terme général $(-1)^n$ converge vers un certain réel ℓ.

   Soit $I = \left]\ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2}\right[$. I est un intervalle ouvert centré en ℓ.

   D'après notre hypothèse, il existe un rang N à partir duquel, on aura :

   $$(-1)^n \in I$$

   Autrement dit : $$-\frac{1}{2} < (-1)^n - \ell < \frac{1}{2}$$

   Or, pour n pair, cela donne : $$\ell \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$$

   Et pour n impair : $$\ell \in \left]-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right[$$

   D'où une contradiction. Donc la suite considérée diverge.

5. Exploitons nos deux hypothèses :

   Comme (u_n) est bornée, il existe un réel M tel que pour tout n :

   $$|u_n| \leqslant M$$

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (v_n) est converge vers 0, on aura à partir d'un certain rang N :

   $$v_n \in \left]\tfrac{\varepsilon}{M} ; \tfrac{\varepsilon}{M}\right[$$

   C'est-à-dire : $$|v_n| < \tfrac{\varepsilon}{M}$$

   D'où : $$|u_n|\,|v_n| < \tfrac{\varepsilon}{M} M \leqslant \varepsilon$$

   C'est-à-dire : $$|u_n v_n| \in]-\varepsilon ; \varepsilon[$$

   Ce qui prouve bien que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

6. Soit (u_n) une suite d'entiers relatifs convergeant vers un certain réel ℓ.

   Il existe donc un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait :

   $$|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$$

   Autrement dit : $$u_n \in \left]\ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2}\right[$$

   Or, l'intervalle $\left]\ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2}\right[$ qui est ouvert et de longueur 1 contient au plus un entier c et comme l'entier u_n est aussi dans cet intervalle, on a : $u_n = c$

   On a prouvé que la suite (u_n) est stationnaire (ou constante à partir d'un certain rang).

   Par conséquent, la suite (u_n) converge vers c et par unicité de la limite $c = \ell$.

7. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) diverge vers $+\infty$, il existe un rang N tel que :

   $$n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$$

   - Si $N = 0$, alors, c'est fini, la suite (u_n) est minorée par A.
   - Si $N \geqslant 1$ alors notons m le plus petit élément de l'ensemble $\{u_0 ; \ldots ; u_{N-1} ; A\}$, ainsi, pour tout entier n :

     $$u_n \geqslant A$$

     Donc (u_n) est minorée.

Exercice 2 *Comportement asymptotique des suites géométriques*

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère la propriété $\wp(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Remarque : on peut étendre cette inégalité à $x \in]-1, +\infty[$

- On a $\wp(0)$ puisque $(1 + x)^0 \geqslant 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x)$$

  Or : $(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + n x^2 = 1 + (n + 1)x + n x^2$

  Comme $n x^2 \geqslant 0$, on a : $(1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$

  D'où : $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x$

  Ce qui est $\wp(n + 1)$.

  Bilan : on a $\wp(0)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$

  Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\wp(n)$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

2. Étude du comportement asymptotique des suites géométriques.

- Supposons $a \in]1 ; +\infty[$. Posons $x = a - 1$. Alors $x \in]0 ; +\infty[$.

  D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$a^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$. Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

  La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

- Si $a = 1$, le résultat est évident.
- Supposons maintenant $a \in]-1 ; 1[$.

  Si $a = 0$, le résultat est évident.

  Si $a \neq 0$, posons : $a' = \dfrac{1}{|a|}$

  Ainsi : $a' \in]1 ; +\infty[$

  D'après le résultat précédent : $\lim\limits_{n\to+\infty} a'^n = +\infty$

  Par passage à l'inverse, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = 0$

  D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

  La suite (u_n) converge donc vers 0.

- Supposons $a \in]-\infty ; -1]$.

  Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite (a^n) converge vers un certain entier ℓ.

  Soit $I = \left]\frac{\ell}{2} ; \frac{3\ell}{2}\right[$. I est un intervalle ouvert centré en ℓ. D'après notre hypothèse, il existe un rang N à partir duquel, on aura :

  $$a^n \in I$$

  Autrement dit : $$\frac{\ell}{2} < a^n < \frac{3\ell}{2}$$

  Or, si est n pair alors $a^n > 0$, d'où : $$0 < \frac{3\ell}{2}$$

  $$0 < \ell$$

  Et si n est impair alors $a^n < 0$ d'où : $$\frac{\ell}{2} < 0$$

  $$\ell < 0$$

  D'où une contradiction. Donc la suite (a^n) diverge.

Exercice 3 *Étude d'une suite récurrente*

1. $f = h \circ g$ où $g : x \in [-1, +\infty[\mapsto \frac{1+x}{2}$ et $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.

   Comme g est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et h est strictement croissante sur $g([-1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$, on en déduit, par composition, que f est croissante sur $[-1, +\infty[$.

2. a. On considère la propriété $\wp$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

   $$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$

   - Comme $u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a bien :

     $$0 < u_0 < u_1 < 1$$

     D'où $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est initialisée au rang 0.

   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

     Comme f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ (puisqu'elle l'est sur $[-1, +\infty[$), on a :

     $$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

     C'est-à-dire : $$\frac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

     D'où : $$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

     Ce qui est $\wp(n+1)$.

     La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 0.

   Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit : $\wp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   C'est-à-dire : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b. On vient de voir que la suite (u_n) est croissante et majorée (par 1), donc elle converge.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1}-1=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-1=\frac{\frac{1+u_n}{2}-1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}=\frac{\frac{u_n-1}{2}}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}=\frac{1}{2}\,\frac{u_n-1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}$$

Or $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\geqslant 0$, d'où $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1\geqslant 1$ et par passage à l'inverse : $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}\leqslant 1$

D'où : $$|u_{n+1}-1|\leqslant \frac{1}{2}|u_n-1|$$

d. Soit P la propriété définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$|u_n-1|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-1|$$

On a $P(0)$.

Si $P(n)$ alors :

$$|u_{n+1}-1|\overset{2.c.}{\leqslant}\frac{1}{2}|u_n-1|\overset{P(n)}{\leqslant}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-1|$$

D'où : $$|u_{n+1}-1|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-1|$$

Ce qui est $P(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $P(n)$, c'est-à-dire :

$$|u_n-1|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-1|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ (limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}\in\,]-1\,;\,1[$), nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-1|=0$$

D'où : $$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

Exercice 4 *Séries de Riemann*

0. On a, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$: $$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}>0$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

1. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$u_{2n}=u_n+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant u_n+n\times\frac{1}{2n}\geqslant u_n+\frac{1}{2}$$

b. Montrons par récurrence la propriété $\wp$, définie sur $k\in\mathbb{N}$, par :

$\wp(k)$: il existe un entier n tel que $u_n\geqslant k$

Comme $u_1=1$, on a $\wp(0)$ (et même $\wp(1)$).

Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons $\wp(k)$. Il existe donc un entier n tel que :

$$u_n \geqslant k$$

Mais d'après la question précédente :

$$u_{4n} \geqslant u_{2n} + \frac{1}{2} \geqslant u_n + 1 \geqslant k + 1$$

Pour l'entier $m = 4n$, on a $u_m \geqslant k + 1$ d'où $\wp(k+1)$.

Donc la propriété $\wp$ est vraie pour tout entier k.

La suite (u_n) n'est donc pas majorée. D'après l'exercice 1 (question 2), la suite étant croissante et non majorée, elle diverge.

2. a. Pour tout $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

b. On a :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Donc (u_n) est majorée par 2.

Pour $\alpha = 2$, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \geqslant 3$.

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$

On aura aussi : $u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$

Donc (u_n) converge (puisque croissante et majorée).

Exercice 5 *Suites de Héron*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Remarque : cette fonction f est **impaire**.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2} = \frac{\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right)}{2x^2}$$

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
signe de $x - \sqrt{a}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + \sqrt{a}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $2x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	$-\sqrt{a}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

Justification des signes :

$x - \sqrt{a} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{a}$

$x + \sqrt{a} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -$

Un carré est positif ou nul

Ne pas oublier de compléter le tableau de variation avec les **valeurs des limites et des éventuels extremums.**

Les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$

Les limites en $-\infty$ et 0^- s'en déduisent facilement en utilisant le fait que f est impaire.

2. a) Notons $\wp$ la propriété définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$\wp(n):\sqrt{a}<u_{n+1}<u_n\leqslant u_0$$

Montrons que $\wp$ est initialisée au rang 0 :

Comme $u_0=E\left(\sqrt{a}\right)+1$, on a $\sqrt{a}<u_0$ et donc $a<u_0^2$.

D'où : $u_1=\dfrac{1}{2}\left(u_0+\dfrac{a}{u_0}\right)<\dfrac{1}{2}(u_0+u_0)=u_0$

Par ailleurs, f est strictement croissante sur $[\sqrt{a}\,;+\infty[$, donc comme $\sqrt{a}<u_0$, on a :

$$f\left(\sqrt{a}\right)<f(u_0)$$

$$\sqrt{a}<u_1$$

On a donc bien : $\sqrt{a}<u_1<u_0$

D'où $\wp(0)$.

Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0 :

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\sqrt{a}<u_{n+1}<u_n\leqslant u_0$

Comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{a}\,;u_0]$, nous avons :

$$f\left(\sqrt{a}\right)<f(u_{n+1})<f(u_n)\leqslant f\left(u_0\right)$$

D'où : $\sqrt{a}<u_{n+2}<u_{n+1}\leqslant u_1<u_0$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{a}<u_{n+1}<u_n\leqslant u_0$

En conséquence, la suite (u_n) est **décroissante** et **minorée** (par $\sqrt{a}$) donc **convergente**.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2}u_n+\frac{a}{2u_n}-\sqrt{a}$$

Or, d'après la question a), on sait que : $\sqrt{a}<u_n$

Par passage à l'inverse : $\dfrac{1}{u_n}<\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

D'où : $u_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\sqrt{a}$

$$u_{n+1}-\sqrt{a}<\frac{1}{2}u_n-\frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$u_{n+1}-\sqrt{a}<\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{a}\right)$$

c) Soit $\wp$ la propriété définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 < u_n - \sqrt{a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

- On a : $0 < u_0 - \sqrt{a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$ d'où $\wp(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$0 \overset{2.b)}{<} u_{n+1} - \sqrt{a} \overset{2.c)}{<} \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right) \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

Ce qui est $\wp(n+1)$

Bilan : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

d) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (puisque $\frac{1}{2} \in]-1\,;\,1[$), nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{a}\right) = 0$$

Du théorème des gendarmes, on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$

Exercice 6 *Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2*

On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : \text{pour tout entier } m \leqslant n,\ u_m = 2^m$$

- Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on a $\wp(1)$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: pour tout entier $m \leqslant n$, $u_m = 2^m$

  Alors : $u_{n+1} = 5 \times 2^n - 6 \times 2^{n-1} = 10 \times 2^{n-1} - 6 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

  D'où $\wp(n+1)$.

Bilan : on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où :

$$\text{pour tout entier } m,\ u_m = 2^m$$

Exercice 7 *Moyenne arithmético-géométrique*

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2}{4} - a_nb_n$$

D'où : $$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$$

Enfin, comme $a_0 > b_0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geqslant b_n$

Bien que ce résultat ne soit pas une hypothèse nécessaire du théorème des suites adjacentes, on l'utilise pour prouver les suivants :

- En effet, d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n + a_n}{2} \leqslant a_n$

  Donc la suite (a_n) est décroissante.

- D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\,) \geqslant 0$

  (par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$)

  Donc la suite (b_n) est croissante.

- On considère maintenant la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

  $$\wp(n) : a_n - b_n \leqslant \frac{a-b}{2^n}$$

  * On a bien sûr $\wp(0)$.

  * Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

    Supposons $\wp(n)$: $a_n - b_n \leqslant \dfrac{a-b}{2^n}$

    Utilisons la propriété : $0 \leqslant X \leqslant Y \Rightarrow (Y-X)^2 \leqslant Y^2 - X^2$

    (Pour le démontrer, il suffit de multiplier l'inégalité $Y - X \leqslant Y + X$ par $Y - X \geqslant 0$)

    Comme $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$, on a :

    $$(a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leqslant a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \overset{(1)}{\leqslant} \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{(a-b)^2}{2^{2n+2}}$$

    Et par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$: $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \dfrac{|a-b|}{2^{n+1}}$

    Et comme, $b_n \leqslant a_n$ pour tout n, on a $\wp(n+1)$.

  Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

  $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : a_n - b_n \leqslant \frac{a-b}{2^n}$$

D'où, par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

On a donc prouvé que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. On ne connaît pas d'expression de cette limite mais elle est liée aux intégrales elliptiques de 2ème espèce...)

Exercice 8 *Divergence des suites (cos n) et (sin n)*

Supposons que la suite $(\cos n)$ converge vers un certain réel $\ell \in [-1, 1]$.

Nous faisons un raisonnement par l'absurde.

On sait que : $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$

Les suites $(\cos(n+1))$ et $(\cos n \cos 1)$ ont, par hypothèse, une limite.

On en déduit, par différence que la suite $(\sin n \sin 1)$ aussi.

Comme sin 1 est non nul, la suite (sin n) converge vers un certain réel $k = \dfrac{\ell(\cos 1 - 1)}{\sin 1}$

Ce réel k est non nul car cos 1 ≠ 1.

En outre, on sait que : $\sin(2n) = 2 \cos n \sin n$

En passant à la limite, on aurait : $k = 2\,\ell\, k$

Et comme $k \neq 0$: $\ell = \dfrac{1}{2}$

Par ailleurs, on sait que : $\cos(2n) = \cos^2 n - \sin^2 n$

En passant à la limite, on aurait : $\ell = \ell^2 - (1 - \ell^2)$

D'où : $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$

$$\ell = 1 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{2}$$

D'où une contradiction.

Donc les suites (cos n) et (sin n) divergent.

Exercice 9 *Suite définie de façon implicite*

1. La fonction P_n étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

On a donc : $P_n' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où : P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(La stricte monotonie sur $\mathbb{R}_+$ découle du fait que la dérivée ne s'annule qu'en un seul point sur $\mathbb{R}_+$)

De plus, P_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$P_n(0)P_n(1) = -1 \times (n-1) < 0$$

On en déduit (théorème de bijection appliqué à P_n sur]0, 1[) que P_n admet une unique racine α_n dans]0, 1[.

Étude du cas $n = 2$: on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_2(x) = x^2 + x - 1$$

Les racines de P_2 sont : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0, 1[$

On a donc : $\alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+1}^k + \alpha_{n+1}^{n+1} - 1 = P_n(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1}$$

Or, $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et $\alpha_{n+1}^{n+1} > 0$, d'où : $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

De plus, $P_n(\alpha_n) = 0$. L'inégalité ci-dessus s'écrit :

$$P_n(\alpha_{n+1}) < P_n(\alpha_n)$$

Comme P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n$$

Ce qui prouve que la suite (α_n) est décroissante.

Comme elle est de plus minorée par 0, elle converge.

3. a. Pour tout $x \neq 1$, on a d'après la formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$P_n(x) = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} - 1 = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$$

Comme, pour tout $n \geqslant 2$, on a $P_n(\alpha_n) = 0$, il vient :

$$\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$$

b. La suite (α_n) étant strictement décroissante, on a évidemment pour tout $n \geqslant 2$:

$$\alpha_n < \alpha_2$$

(Ceux qui n'en sont pas convaincus peuvent le démontrer par récurrence)

Et comme $\alpha_2 \in]0, 1[$ (vu à la question 1), on a bien pour tout $n \geqslant 2$:

$$\alpha_n < \alpha_2 < 1$$

Par stricte croissance, sur $\mathbb{R}_+$, de l'application $t \mapsto t^{n+1}$, il vient :

$$\alpha_n^{n+1} < \alpha_2^{n+1}$$

Et d'après la question 3.a. : $2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$

Or, $\alpha_n \in]0, 1[$ donc $2\alpha_n - 1 \in]0, 1[$ d'où :

$$0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$$

c. Comme $\alpha_2 \in]0, 1[$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$

D'où, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} (2\alpha_n - 1) = 0$$

Et finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$

Exercice 10 *Étude d'une suite arithmético-géométrique. Passage à l'euro*

1) a) $u_2 = u_1 + 50 = 600$

Chaque année le dépôt augmente de 50 F, donc :

$$u_{n+1} = u_n + 50$$

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 50$.

De la relation $u_n = u_0 + nr$, on déduit :

$$u_n = 500 + 50n$$

b) $s_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 1650$

Le montant, en francs, de la somme contenue dans la tirelire le 1er janvier $1982 + n$ est la somme de tous les dépôts effectués entre 1982 et $1982 + n$:

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

C'est donc la somme des $n + 1$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Une telle somme S se calcule avec la relation :

$$S = \frac{N(P+D)}{2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} N = \text{ nombre de termes de la somme} = n+1 \\ P = \text{premier terme de la somme} = u_0 \\ D = \text{dernier terme de la somme} = u_n \end{cases}$$

On obtient : $s_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

Et d'après la question [1a] : $s_n = \dfrac{(n+1)(500+500+50n)}{2}$

D'où finalement : $s_n = (n+1)(500+25n)$

c) On a : 2002 = 1982 + 20. Donc $n = 20$. Il s'agit de calculer s_{20}.

D'après la question [1b] : $s_{20} = 21 \times (500 + 25 \times 20) = 21000$

Le montant reçu par Julien est : 21000 francs

Soit en euros : 3201,43 euros

2) a) Le 31 décembre de chaque année, le capital c_n augmente de 4%. Il devient donc :

$$\left(1+\frac{4}{100}\right) c_n = 1{,}04c_n$$

De plus, le jour suivant (1er janvier), Julien ajoute 200 € sur son compte.

Le nouveau capital c_{n+1} est donc : $c_{n+1} = 1{,}04c_n + 200$

b) Montrons qu'il existe un réel q tel que : $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = c_{n+1} + 5000$

D'après la question [2a] : $u_{n+1} = 1{,}04c_n + 200 + 5000 = 1{,}04c_n + 5200$

$$u_{n+1} = 1{,}04(u_n - 5000) + 5200$$

$$u_{n+1} = 1{,}04u_n - 5200 + 5200$$

$$u_{n+1} = 1{,}04u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}04$.

c) Comme la suite (u_n) est géométrique, on a d'après la relation $u_n = q^n u_0$:

$$u_n = 8000 \times 1{,}04^n$$

D'où : $c_n = 8000 \times 1{,}04^n - 5000$

d) Il s'agit de déterminer le plus petit entier n tel que :

$$c_n \geqslant 6000$$

$$8000 \times 1{,}04^n - 5000 \geqslant 6000$$

$$8000 \times 1{,}04^n \geqslant 11000$$

En divisant par 8000 : $1{,}04^n \geqslant \dfrac{11}{8}$

D'après la propriété : $A \geqslant B \Leftrightarrow \ln A \geqslant \ln B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$, on a :

$$\ln(1{,}04^n) \geqslant \ln\left(\frac{11}{8}\right)$$

Si le logarithme népérien n'a pas encore été étudié, on peut déterminer n par tatonnements.

D'après la relation : $\ln(A^n) = n \ln A$, pour tout A de $]0 ; +\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$n \ln(1{,}04) \geqslant \ln\left(\frac{11}{8}\right)$$

En divisant par ln(1,04) qui est **positif** (car 1,04 > 1 et $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$) :

$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{11}{8}\right)}{\ln(1{,}04)}$$

Or, d'après la calculatrice : $\dfrac{\ln\left(\frac{11}{8}\right)}{\ln(1{,}04)} \simeq 8{,}12$ à 10^{-2} près

On en déduit (n étant entier) : $n \geqslant 9$

Julien devra donc attendre au moins 9 ans avant de disposer de 6000 euros sur son compte.