THÉORÈMES DE CESARO

Théorème 1 version "suite convergente"

Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers un réel ℓ.

Alors la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

converge également vers ℓ.

> Autrement dit, le théorème de Cesàro affirme que la convergence entraîne la convergence en moyenne.

(On dit que (u_n) converge en moyenne vers ℓ ou converge au sens de Cesàro)

Démonstration :

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) converge vers ℓ : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k \geqslant N \Rightarrow |u_k - \ell| \leqslant \varepsilon)$

Pour $n > N$, on a : $v_n - \ell = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - \ell|$$

Posons $A_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - \ell|$.

Il est clair $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc : $\exists N' \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N' \Rightarrow |A_n| \leqslant \varepsilon)$

Pour $n > \max(N, N')$, on a alors :

$$|v_n - \ell| \leqslant A_n + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

Ce qui prouve bien que (v_n) converge vers ℓ.

Remarque :

Une suite qui converge en moyenne ne converge pas nécessairement. Autrement dit, la réciproque du théorème de Cesàro est fausse. Voici un contre-exemple :

$$u_n = (-1)^n$$

(u_n) diverge tandis que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

Théorème 2 version "suite divergente vers $+\infty$"

Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$.

Alors la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

diverge également vers $+\infty$.

Démonstration :

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Par hypothèse : $\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n \geqslant 3A)$

Pour $n > N_0$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0} u_k + 3\frac{n-N_0}{n}A$$

Posons $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0} u_k$, ainsi : $v_n \geqslant A_n + 3A - 3\frac{N_0}{n}A$

Il est clair $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc : $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_1 \Rightarrow -A \leqslant A_n \leqslant A)$

De même, $-3\frac{N_0}{n}A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_2 \Rightarrow -A \leqslant -3\frac{N_0}{n}A \leqslant A)$$

Si bien que pour $n \geqslant \max(N_0, N_1, N_2)$, on a :

$$v_n \geqslant -A + 3A - A$$

$$v_n \geqslant A$$

Ce qui prouve bien que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Remarque : contre-exemple à la réciproque du théorème de Cesàro, version "divergence vers $+\infty$"

$$u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Il est clair que (u_n) diverge (considérer les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}))

Montrons, cependant, que (u_n) diverge vers $+\infty$ au sens de Cesàro :

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{2p} = \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{2p} u_k = \frac{1}{2p}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} u_k = \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{p} u_{2j} = \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{p} 2j = \frac{p+1}{2}$$

$$v_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\sum_{k=1}^{2p+1} u_k = \frac{1}{2p+1}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p+1} u_k = \frac{1}{2p+1}\sum_{j=1}^{p} u_{2j} = \frac{1}{2p+1}\sum_{j=1}^{p} 2j = \frac{p(p+1)}{2p+1}$$

Les suites extraites (v_{2p}) et (v_{2p+1}) divergent toutes deux vers $+\infty$, donc la suite (v_n) aussi.

Hypothèse supplémentaire pour obtenir la réciproque du théorème de Cesàro

Soit (u_n) une suite monotone.

Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

On suppose que (v_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors (u_n) tend aussi vers ℓ.

Démonstration :

Comme (u_n) est monotone, elle converge ou diverge (vers $+\infty$ ou $-\infty$). Mais alors, d'après le théorème direct de Cesàro, (v_n) aura le même comportement. Donc (u_n) se comporte bien comme (v_n).