

Dans tout ce chapitre, les bases ou repères considérés sont orthonormés.

Pour des révisions sur le produit scalaire dans le plan, voir le cours de première.

1. Définition du produit scalaire et conséquences

On donne ci-dessous une définition possible (et à mon sens la plus valable) du produit scalaire en terminale.

1.1. Définition

On considère une base orthonormale de l'espace.

Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On peut noter les coordonnées des vecteurs en colonne, ce qui facilite le calcul :

$$\vec{u} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple : avec $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(2; 3; 6)$, on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 6 + 18 = 26$$

Remarques :

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{u}\|^2$

On notera parfois (par convention) : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

De même, si A et B sont deux points, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$

On notera parfois : $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$

- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire est nul. Mais attention, l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'entraîne pas nécessairement $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. En effet, il suffit de considérer par exemple les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$ et $\vec{v}(2; -1; 0)$ pour s'en convaincre.
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{v} = k\vec{u}$) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x.kx + y.ky + z.kz = k(x^2 + y^2 + z^2) = k \|\vec{u}\|^2$$

1.2. Théorème Autres expressions du produit scalaire

$$1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$2. \quad \text{Lorsque } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} : \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$3. \quad \text{Lorsque } \vec{u} \neq \vec{0} : \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'}$$

où $\vec{v'}$ est le vecteur projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$.

Démonstrations :

1. Notons $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(xx' + yy' + zz') = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

De même :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 + z^2 - 2zz' + z'^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2(xx' + yy' + zz') = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Et enfin, en utilisant ce qui précède : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Les trois relations ci-dessus (encore appelées "identités de polarisation") sont importantes. Elles montrent, en autres, que le produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie, il ne dépend que de normes de vecteurs.

2 et 3. Établissons tout d'abord les expressions 2 et 3 dans un cas particulier :

- Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires : il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

On a alors :

$$\|\vec{v}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

D'où :

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |k| \cdot \|\vec{u}\|^2 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Or :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \text{ si } k < 0$$

Donc :

$$|k| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = k$$

Et finalement :

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = k \|\vec{u}\|^2$$

Et d'après une remarque précédente :

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a :

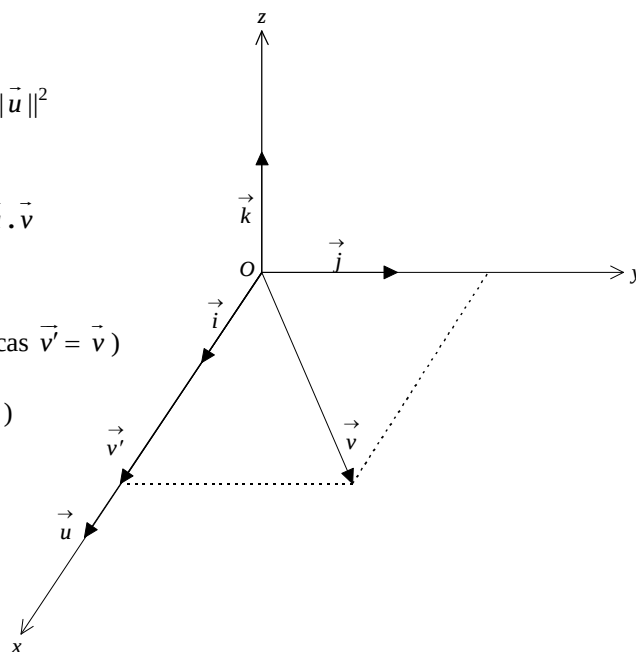
$$\vec{u} \cdot \vec{v}' = \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ (puisque dans ce cas } \vec{v}' = \vec{v} \text{)}$$

- Supposons maintenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires (donc $\vec{v} \neq \vec{0}$)

Posons $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ (possible car $\vec{u} \neq \vec{0}$)

Soit $\vec{j}$ un vecteur coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que :

$$(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \|\vec{j}\| = 1$$



Soit $\vec{k}$ le vecteur orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit directe.

Nous avons ainsi construit une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormale directe. Dans cette base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{u} (\|\vec{u}\|, 0, 0), \vec{v} (\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}), \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}), 0) \text{ et } \vec{v}' (\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}), 0, 0)$$

Et comme le produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie, la définition 1.1. donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v}' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Ce qui démontre les expressions 2 et 3.

Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a .

Calculons de plusieurs façons le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}$:

- Avec la définition en considérant la base orthonormale $\left(\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AE}}{AE}\right)$:

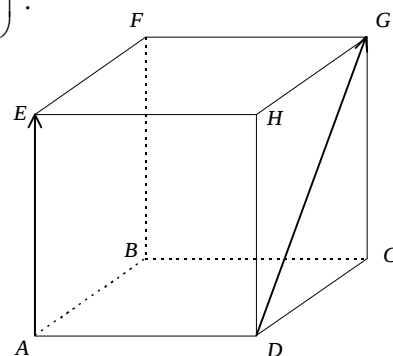
On a $\overrightarrow{AE} (0 ; 0 ; a)$ et $\overrightarrow{DG} (0 ; a ; a)$ d'où $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = a^2$.

- Avec le cosinus :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = AE \times DG \times \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DG}) = a \times a \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} = a^2.$$

- Avec le vecteur projeté :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2 = a^2.$$



Voyons maintenant un lien important entre le produit scalaire et le théorème de Pythagore.

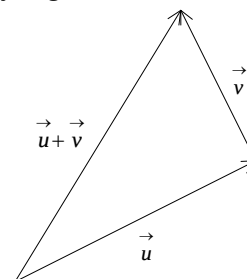
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux.

On a alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Et d'après la relation $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$, nous obtenons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Réciproquement, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors la même relation permet d'affirmer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit l'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Résumons :

1.3. Propriété

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque : si un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur, alors c'est le vecteur nul.

En effet, on a alors en particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$

En notant (x, y, z) les coordonnées de $\vec{u}$ dans une base orthonormée, on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

D'où, nécessairement :

$$x = y = z = 0$$

Et donc :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

2. Propriétés du produit scalaire

2.1. Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit λ un réel. On a les propriétés suivantes :

- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéarité (linéarité par rapport aux deux places) :
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$ (linéarité par rapport à la première place)
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$ (linéarité par rapport à la seconde place)
- Séparation : si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$

Démonstrations :

- Symétrie : évident d'après la définition.
- Bilinéarité : notons $(x; y; z)$, $(x'; y'; z')$ et $(x''; y''; z'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans une base orthonormée. On a alors :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (x + x')x'' + (y + y')y'' + (z + z')z'' = xx'' + x'x'' + yy'' + y'y'' + zz'' + z'z''$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = xx'' + yy'' + zz'' + x'x'' + y'y'' + z'z'' = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda xx' + \lambda yy' + \lambda zz' = \lambda (xx' + yy' + zz') = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$$

La symétrie livre la linéarité par rapport à la seconde place.

- Séparation : a déjà été démontrée dans une remarque ci-dessus.

Exemple : à l'aide de la linéarité, démontrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$

Exercice 1 : $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a . (Chaque face est un triangle équilatéral de côté a)

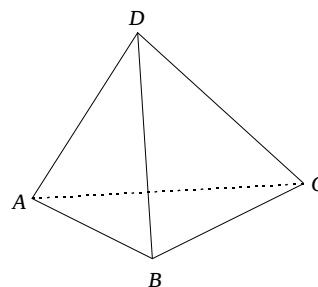
Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

Remarquons que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$.

De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$.

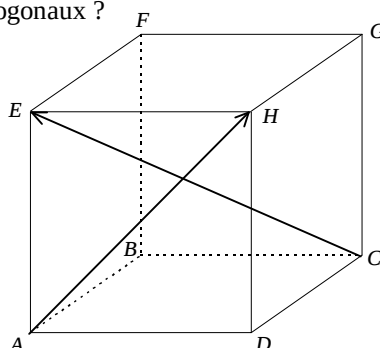
D'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$.

Donc les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ sont orthogonales. On procède de même pour les deux autres.



Exercice 2 : $ABCDEFGH$ est un cube dont les sommets sont disposés comme sur la figure ci-dessous.

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils orthogonaux ?



Il suffit d'écrire :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})$$

Par linéarité :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux puisque $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à la face (ADH) et les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DE}$ le sont également (diagonales d'un carré) d'où :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux.

Poursuivons maintenant ce paragraphe avec des propriétés qui sont à la limite du programme de TS.

2.2. Théorème Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Démonstration : on sait que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Or :

$$|\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$$

D'où :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

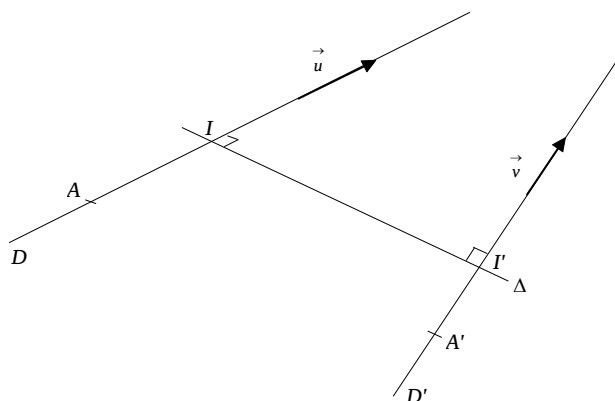
Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires}$$

Application : la perpendiculaire commune.

Dans l'espace, on considère deux droites D et D' dirigées par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

Montrer que, dans ces conditions, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et D' .



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors D et D' sont parallèles. Il existe alors une infinité de perpendiculaires communes.

Si D et D' sont coplanaires (et donc sécantes en un point O puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires) alors la droite Δ passant par O et orthogonale au plan contenant D et D' convient et c'est la seule.

Pour la suite, on considère que D et D' ne sont pas coplanaires (donc non sécantes)

Soit A un point fixé de D et A' un point fixé de D' . (Et nécessairement, $A' \neq A$)

Soit I un point quelconque de D et I' un point quelconque de D' . (Et nécessairement $I' \neq I$)

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'I'}$$

Notons, par ailleurs :

$$\overrightarrow{IA} = \alpha \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'I'} = \beta \vec{v}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{II'} = \alpha \vec{u} + \overrightarrow{AA'} + \beta \vec{v}$$

Montrons qu'il n'y a qu'un seul point I de D et un seul point I' de D' tels que (II') soit perpendiculaire à D et D' .

$$\text{La condition } \overrightarrow{II'} \cdot \vec{u} = 0 \text{ équivaut à : } \alpha \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \overrightarrow{AA'} + \beta \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{La condition } \overrightarrow{II'} \cdot \vec{v} = 0 \text{ équivaut à : } \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{AA'} + \beta \vec{v}^2 = 0$$

La droite (II') est donc une perpendiculaire commune à D et D' si et seulement si α et β sont solutions du système

$$(S) : \begin{cases} \alpha \vec{u}^2 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{v}^2 = -\vec{v} \cdot \overrightarrow{AA'} \end{cases}$$

$$\text{Or, le déterminant } \delta \text{ de ce système est : } \delta = \vec{u}^2 \times \vec{v}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Et comme, par hypothèse, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte.

En conséquence ce déterminant est non nul.

Il existe donc un unique couple (α, β) satisfaisant les conditions $\overrightarrow{II'} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{II'} \cdot \vec{v} = 0$.

Autrement dit, il existe un unique point I de D et un unique point I' de D' tel que la droite $\Delta = (II')$ soit perpendiculaire à D et D' .

Voyons maintenant une autre inégalité importante découlant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

2.3. Conséquence Inégalité triangulaire

$$\text{Pour tous vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ on a : } \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Démonstration :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, il est clair qu'il y a égalité.

$$\text{Supposons } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls et : } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

$$\text{Alors : } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

$$\text{Et donc, } a \text{ fortiori : } |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

On a donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{v} = k\vec{u}$$

Montrons que k est positif :

D'une part :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + k\vec{u}\| = |1 + k| \|\vec{u}\|$$

D'autre part :
$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|k\vec{u}\| = (1 + |k|) \|\vec{u}\|$$

D'où :
$$|1 + k| \|\vec{u}\| = (1 + |k|) \|\vec{u}\|$$

Et comme on a supposé $\vec{u} \neq \vec{0}$:
$$|1 + k| = 1 + |k|$$

- Si $k \leq -1$ alors cela donne $-1 - k = 1 - k$, ce qui est absurde.
- Si $-1 \leq k < 0$ alors cela donne $1 + k = 1 - k$ d'où $k = 0$, ce qui est contradictoire.

On a donc bien $k \geq 0$ et par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (on dit encore "positivement liés").

Réciproquement, supposons : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens :

Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

D'une part :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + k\vec{u}\| = |1 + k| \|\vec{u}\| = (1 + k) \|\vec{u}\|$$

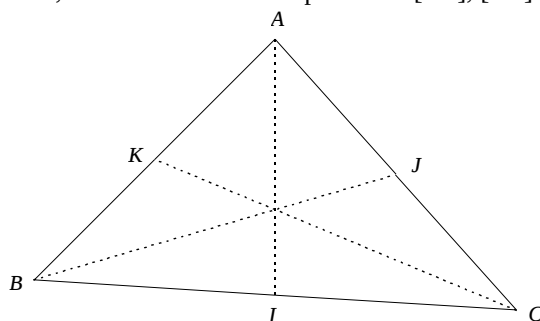
D'autre part :
$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|k\vec{u}\| = (1 + |k|) \|\vec{u}\| = (1 + k) \|\vec{u}\|$$

On a donc :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Bilan :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \text{Il existe } k \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \vec{v} = k\vec{u}$$

Exemple d'application de l'inégalité triangulaire

ABC est un triangle. On note I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



Démontrer que :
$$AI + BJ + CK \leq AB + BC + CA$$

On a :
$$2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

En passant à la norme :
$$2\|\vec{AI}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|$$

Et d'après l'inégalité triangulaire :
$$2\|\vec{AI}\| \leq \|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\|$$

C'est-à-dire :
$$2AI \leq AB + AC$$

De même en raisonnant par rapport aux autres médianes :

$$2BJ \leq BC + BA$$

$$2CK \leq CB + CA$$

Et en additionnant les trois inégalités ci-dessus :

$$AI + BJ + CK \leq AB + BC + CA$$

(L'inégalité est même stricte lorsque le triangle n'est pas aplati)

3. Applications du produit scalaire dans l'espace

1) Équation cartésienne d'un plan

3.1. Définition

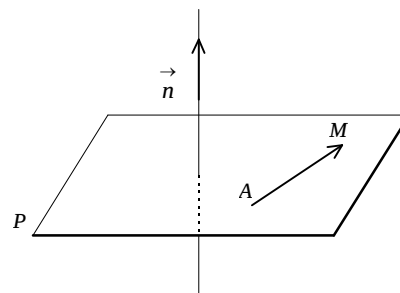
Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à P .

Soit A un point du plan P . On a donc, pour tout point M de P , $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Réciproquement, si un point M vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors M est dans le plan P .

Conséquence : le plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple : trouver, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(2 ; 1 ; -3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1 ; 1 ; 2)$.



On utilise la caractérisation suivante : $M(x ; y ; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

La condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit encore :

$$(x - 2) \times 1 + (y - 1) \times 1 + (z + 3) \times 2 = 0$$

D'où une équation cartésienne de P : $x + y + 2z + 3 = 0$

3.2. Théorème

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan P admet une équation (dite cartésienne) de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nuls})$$

Le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ est normal à ce plan.

Démonstration :

Elle repose sur les équivalences suivantes : (en notant $M(x ; y ; z)$, $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et $\vec{n}(a ; b ; c)$)

$$M \in P \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Et en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$: $ax + by + cz + d = 0$

Cas particuliers :

- le plan (Oxy) a pour équation $z = 0$, le plan (Oxz) : $y = 0$ et le plan (Oyz) : $x = 0$.
- le plan passant par les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ (lorsque $abc \neq 0$) a pour équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

En effet, il s'agit bien d'une équation cartésienne d'un plan P contenant les points A , B et C et comme ceux-ci ne sont pas alignés (car $\overrightarrow{AB}(-a, b, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-a, 0, c)$ ne sont pas colinéaires puisque $abc \neq 0$), ce plan P correspond bien au plan (ABC) .

Exercice :

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$P : x - 4y + 7 = 0$$

$$Q : x + 2y - z + 1 = 0$$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.
2. Déterminer un vecteur directeur de d .

Un vecteur normal à P est $\vec{n}(1 ; -4 ; 0)$. Un vecteur normal $\vec{n}'$ au plan Q est $\vec{n}'(1 ; 2 ; -1)$. Étudions la colinéarité de ces deux vecteurs : existe-t-il un réel k tel que $\vec{n}' = k \vec{n}$? La réponse est clairement non. (Il faudrait que k soit solution des trois équations $1 = k \times 1$; $2 = k \times (-4)$ et $-1 = k \times 0 \dots$)

Les plans P et Q sont donc sécants.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Posons $y = t$, il vient alors $x = 4t - 7$ et $z = 4t - 7 + 2t + 1 = 6t - 6$.

D'où une représentation paramétrique de d :

$$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 6t - 6 \end{cases}$$

Soit A le point de coordonnées $(-7 ; 0 ; -6)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(4 ; 1 ; 6)$.

Le point A est un point de la droite d (obtenu lorsque $t = 0$)

Le système ci-dessus s'écrit encore :

$$\overrightarrow{AM} = t \vec{u}$$

Un vecteur directeur de d est donc $\vec{u}(4 ; 1 ; 6)$

3.3. Théorème

Deux plans P et Q sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Deux plans P et Q sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

2) Demi-espaces

Soient $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point

On vient de voir que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan P contenant A et de vecteur normal $\vec{n}$.

3.4. Définition

On appelle demi-espaces (ouverts) délimités par P les ensembles E et F des points M définis respectivement par les conditions :

$$E : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0$$

$$F : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} < 0$$

On définit de même des demi-espaces fermés à l'aide d'inégalités larges.

Soient M un point de E et N un point de F . Alors il existe un réel λ strictement négatif tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= \lambda \overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} \\ (\overrightarrow{AM} - \lambda \overrightarrow{AN}) \cdot \vec{n} &= 0\end{aligned}$$

Soit B le barycentre de $(M, 1)$ et $(N, -\lambda)$. (Ce barycentre existe bien car $1 - \lambda > 0$)

Ainsi, on a :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} - \lambda \overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{BN} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AB}$$

D'où :
$$(1 - \lambda) \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

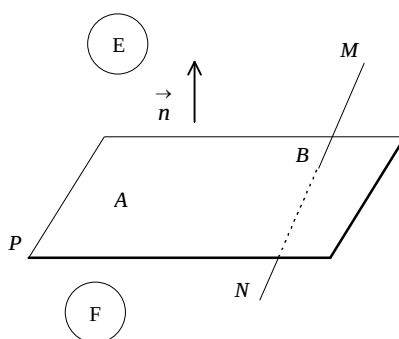
Et comme $1 - \lambda > 0$:
$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

Donc :
$$B \in P$$

Par ailleurs, comme les coefficients du barycentre B de M et N sont de signe opposés :

$$B \in [MN]$$

On a montré que pour tout point M de E et tout point N de F , le segment $[MN]$ rencontre le plan P .



3.5. Résumons :

Le plan P partage l'espace en deux "demi-espaces" caractérisés par les conditions $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} < 0$.

Ces deux demi-espaces sont définis par les inéquations suivantes :

$$E : ax + by + cz + d > 0$$

$$F : ax + by + cz + d < 0$$

Attention ! Le sens des inégalités dans les inéquations ci-contre dépend du vecteur normal choisi !

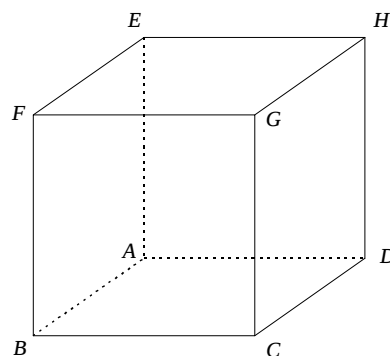
Exemple : caractérisation de l'intérieur d'un cube.

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Les points $M(x, y, z)$ situés à l'intérieur du cube sont ceux qui vérifient :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$



3) Distance d'un point à un plan

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et P un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Comment calculer la distance entre le point A et le plan P ?

Notons $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur P .

Nous savons que le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est normal au plan P .

Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires :

Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AH} = t \vec{n}$.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$:

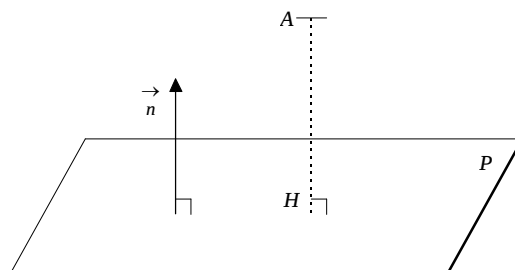
D'une part, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A)$. Et puisque $H \in P$, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -(ax_A + by_A + cz_A + d)$

D'autre part, puisque $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on a : $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.

D'où :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(Formule à savoir retrouver)



Retenir l'idée de cette démonstration qui est de calculer $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|$ de deux manières différentes.

4) Distance d'un point à une droite, dans l'espace

On se donne ici une droite D passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$.

On se donne un autre point $M(x_M; y_M; z_M)$ et on cherche à calculer la distance entre le point M et la droite D .

L'idée est d'exploiter le plan P , orthogonal à D et passant par A .

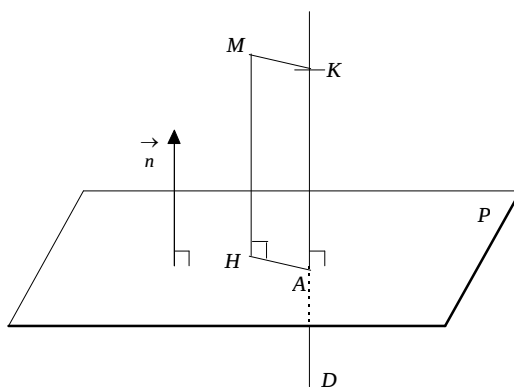
Notons H et K les projetés respectifs de M sur D et P .

Comme $MHAK$ est un rectangle, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$MK^2 = MA^2 - MH^2$$

La distance MA se calcule facilement car M et A sont donnés.

La distance MH se calcule avec la formule ci-dessus (distance entre le point M et la plan P)



5) Équation d'une sphère

3.6. Théorème

Toute sphère S de centre $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon R admet une équation de la forme :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Démonstration : Immédiate : cela découle du fait que S est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\Omega M^2 = R^2$.

3.7. Théorème

La sphère S de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration : On utilise, par exemple, une formule de la médiane :

Soit I le milieu de $[AB]$ (et donc le centre de la sphère), alors :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - R^2$$

(Où R est le rayon de la sphère)

On en déduit :

$$M \in S \Leftrightarrow MI = R \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Exemple :

Équation de la sphère S de diamètre $[AB]$ avec $A(0 ; 0 ; -1)$ et $B(1 ; 2 ; -3)$. Préciser son centre et son rayon.

Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de cette sphère. La condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ s'écrit :

$$x(x - 1) + y(y - 2) + (z + 1)(z + 3) = 0$$

$$x^2 - x + y^2 - 2y + z^2 + 4z + 3 = 0$$

On canonise suivant chaque variable :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 + (z + 2)^2 - 4 + 3 = 0$$

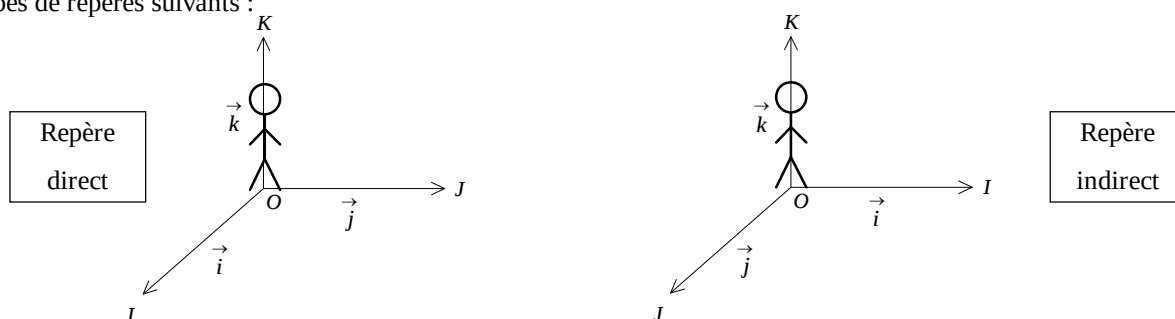
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = \frac{9}{4}$$

D'où les coordonnées du centre $\Omega\left(\frac{1}{2} ; 1 ; -2\right)$ et le rayon $R = \frac{3}{2}$.

Remarque : on pouvait simplement trouver ce résultat en calculant les coordonnées du milieu de $[AB]$ pour obtenir le centre et en calculant la moitié du diamètre AB pour obtenir le rayon.

4. Complément : produit vectoriel dans l'espace (Hors programme)

Avant toutes choses, nous avons besoin dans ce paragraphe, d'orienter l'espace, c'est-à-dire distinguer les deux types de repères suivants :

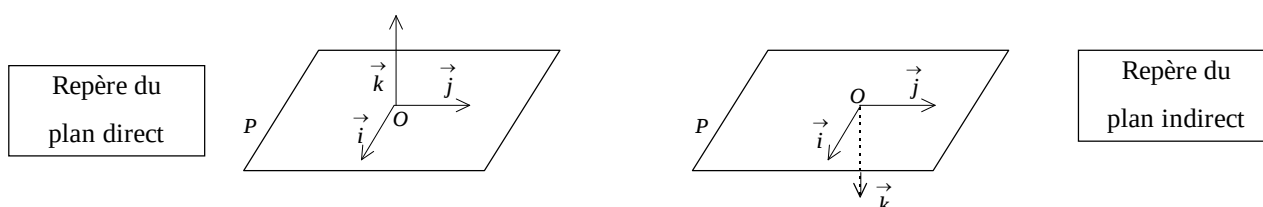


Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I .

Un repère est dit "direct" si, l'observateur à le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.

L'espace étant orienté, il est alors possible d'orienter tout plan de l'espace :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère d'un plan P . Soit $\vec{k}$ un vecteur normal au plan P . On dira que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct dans P lorsque le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'est dans l'espace :



Les bases de l'espace ou des plans s'orientent de la même façon que les repères.

4.1. Définition

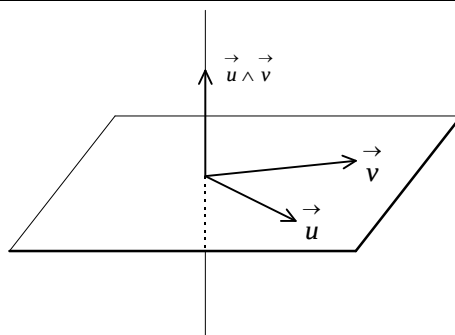
On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) :

Rappel : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$ (norme ou longueur de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)



Cas des vecteurs colinéaires : d'après la définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls), alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ puisque $\|\vec{u}\| \neq 0$, $\|\vec{v}\| \neq 0$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ (π).

On peut donc énoncer la conséquence suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Ce qui sera parfois un critère pour savoir si trois points sont alignés ou non.

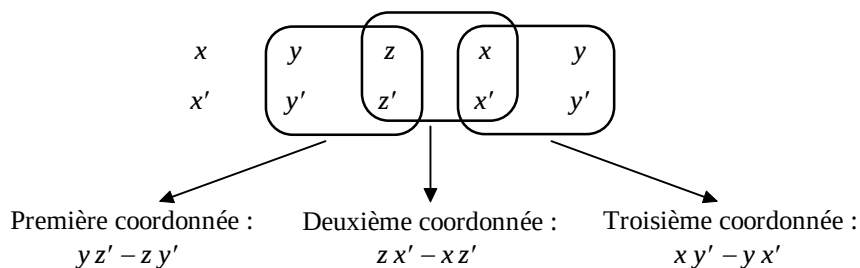
4.2. Théorème

Si $\vec{u} (x; y; z)$ et $\vec{v} (x'; y'; z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$

Nous admettons ce théorème.

Règle pratique pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

On écrit sur une ligne les coordonnées de $\vec{u}$ en répétant, à la suite la première et la seconde coordonnée. On procède de même avec $\vec{v}$ sur une seconde ligne. Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont obtenues à l'aide des produits en croix suivants :



Exemple : $\vec{u} (2; -1; 3)$ et $\vec{v} (-4; 2; -2)$:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -4 & 2 \end{array}$$

D'où $\vec{u} \wedge \vec{v} (-4; -8; 0)$

4.3 Propriétés

Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

Bilinéarité (linéarité par rapport aux deux variables) :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \text{ et } (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ (linéarité par rapport à la première variable)}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \text{ et } \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ (linéarité par rapport à la seconde variable)}$$

Ces propriétés se démontrent avec le théorème 4.2. en écrivant les coordonnées des vecteurs en jeu.

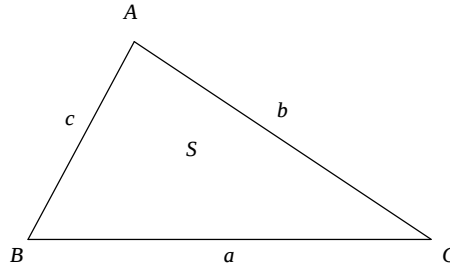
4.4. Applications du produit vectoriel

1) Aire d'un triangle ou d'un parallélogramme

Lorsque ABC est un triangle, on a établi en classe de première que l'aire S de ABC est donnée par :

$$S = \frac{1}{2} b c \sin \hat{A}$$

où $b = AC$, $c = AB$ et $\hat{A}$ est l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.



Ce qui s'écrit encore :

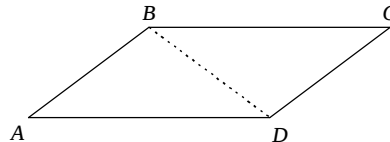
$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AC}\| \|\vec{AB}\| |\sin(\vec{AB}, \vec{AC})|$$

On en déduit :

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

De même, en présence d'un parallélogramme $ABCD$, on a :

$$\text{aire}(ABCD) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$$



Exemple : Soient $\vec{u} (3 ; 2)$ et $\vec{v} (1 ; 2)$. Soient O un point et A, B et C les points définis par :

$$\vec{OA} = \vec{u}, \vec{OB} = \vec{v} \text{ et } \vec{OC} = \vec{u} + \vec{v}$$

Calculer (en u.a.) l'aire du parallélogramme $OACB$. (Réponse : 4 u.a.)

Généralisation : si $\vec{u} (x ; y)$ et $\vec{v} (x' ; y')$. Démontrer que l'aire du parallélogramme $OACB$ est donnée par :

$$\text{aire}(OACB) = |xy' - x'y| \text{ u.a.}$$

En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a : $\text{aire}(OACB) = 0$.

2) Équation d'un plan (ABC)

On a vu dans les applications sur le produit scalaire comment trouver l'équation d'un plan connaissant l'un de ses points et un de ses vecteurs normaux. Comment faire pour trouver l'équation du plan lorsqu'il est défini par trois points A , B et C non alignés ? On utilise alors le produit vectoriel qui fournit un vecteur normal.

Exemple :

On donne : $A(1 ; 2 ; -1)$, $B(2 ; 3 ; 0)$ et $C(1 ; 2 ; 4)$

On a $\vec{AB}(1 ; 1 ; 1)$ et $\vec{AC}(0 ; 0 ; 5)$. Donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(5 ; -5 ; 0)$. Les points A , B et C sont donc non alignés.

Il existe un et un seul plan P passant par ses points et un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}(5 ; -5 ; 0)$.

Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de l'espace. On a :

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

D'où une équation cartésienne de P :

$$(x - 1) \times 5 + (y - 2) \times (-5) = 0$$

$$5x - 5y + 5 = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

Un autre méthode, consiste à considérer une équation cartésienne de P de la forme $ax + by + cz + 1 = 0$ puis à résoudre le système obtenu en écrivant les conditions $A \in P$, $B \in P$ et $C \in P$.

Exercice : soit P le plan d'équation : $x + y + z = 0$.

Trouver deux vecteurs non colinéaires de P . (Réponse : $\vec{u}(1 ; -1 ; 0)$ et $\vec{v}(0 ; 1 ; -1)$)