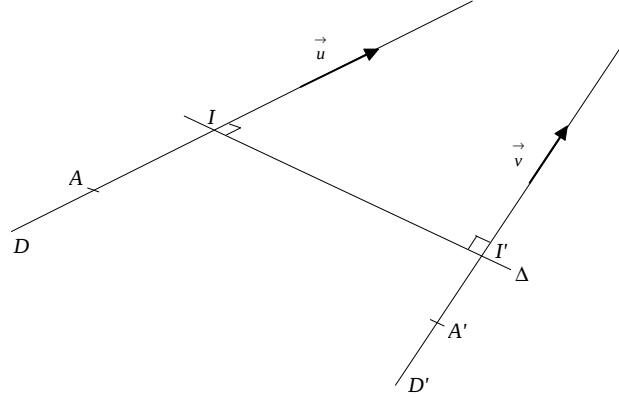


THÉORÈME DE LA PERPENDICULAIRE COMMUNE

Dans l'espace affine de dimension 3, on considère deux droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(A', \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Alors, dans ces conditions, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et D' .



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors D et D' sont parallèles. Il existe alors une infinité de perpendiculaires communes.

Si D et D' sont coplanaires (et donc sécantes en un point O puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires) alors la droite Δ passant par O et orthogonale au plan contenant D et D' convient et c'est la seule.

Pour la suite, on considère que D et D' ne sont pas coplanaires (donc non sécantes)

Soit I un point quelconque de D et I' un point quelconque de D' . (Et nécessairement $I' \neq I$)

D'après la relation de Chasles : $\vec{II'} = \vec{IA} + \vec{AA'} + \vec{A'I'}$

Notons, par ailleurs : $\vec{IA} = \alpha \vec{u}$ et $\vec{A'I'} = \beta \vec{v}$

Ainsi : $\vec{II'} = \alpha \vec{u} + \vec{AA'} + \beta \vec{v}$

Montrons qu'il n'y a qu'un seul point I de D et un seul point I' de D' tels que (II') soit perpendiculaire à D et D' .

La condition $\vec{II'} \cdot \vec{u} = 0$ est équivalente à :

$$\alpha \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{AA'} + \beta \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

La condition $\vec{II'} \cdot \vec{v} = 0$ est équivalente à :

$$\alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{AA'} + \beta \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

La droite (II') est donc une perpendiculaire commune à D et D' si et seulement si α et β sont solutions du système

$$(S) : \begin{cases} \alpha \vec{u} \cdot \vec{u} + \beta \vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{AA'} \\ \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{v} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{AA'} \end{cases}$$

Or, le déterminant δ de ce système est : $\delta = \vec{u} \cdot \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Et comme, par hypothèse, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte.

En conséquence ce déterminant est non nul.

Il existe donc un unique couple (α, β) satisfaisant les conditions $\vec{II'} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{II'} \cdot \vec{v} = 0$.

Autrement dit, il existe un unique point I de D et un unique point I' de D' tel que la droite $\Delta = (II')$ soit perpendiculaire à D et D' .

Remarque : en résolvant le système (S) , on peut, en connaissant $A, A', \vec{u}$ et $\vec{v}$ construire la droite Δ .