Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$

En déduire une construction du pentagone régulier.

Posons $x_1 = \cos\frac{2\pi}{5}$ et $x_2 = \cos\frac{4\pi}{5}$.

L'idée est de calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 afin de trouver un polynôme du second degré dont x_1 et x_2 sont les racines.

Posons : $$Z = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$$

On a : $$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = \frac{1-Z^5}{1-Z} = 0$$

D'où : $$1 + \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{-\frac{4\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}} = 0$$

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$$

En outre : $$x_1x_2 = \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$$

D'après la relation : $$\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) + \cos(p+q)]$$

On déduit : $$x_1x_2 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\frac{6\pi}{5}\right] = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{1}{4}$$

Les réels x_1 et x_2 sont donc les racines du polynôme $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$.

On en déduit :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

<u>Construction du pentagone régulier</u> :

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal. Soient A_k $(0 \leqslant k \leqslant 4)$ les points d'affixes $\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On construit :

$$O'\left(-\tfrac{1}{4}\,;\,0\right) \quad \text{et} \quad B\left(0\,;\,\tfrac{1}{2}\right)$$

Ainsi : $$O'B = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Soit C le point d'abscisse positive en lequel le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon $O'B$ coupe l'axe $(O, \vec{u})$.

Comme O', O et C sont alignés dans cet ordre, on a :

$$O'C = O'O + OC$$

$$OC = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}$$

Il reste alors à construire A_1 sur le cercle $\mathscr{C}$ tel que le projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{u})$ soit C.

Les points suivants du pentagone sont obtenus en reportant, au compas, la longueur A_0A_1. (Où à l'aide de C')