On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ de sens direct.

PARTIE A : *des caractérisations du triangle équilatéral*

On note $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$. Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v et w.

1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct } \Leftrightarrow u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

2. Démontrer l'équivalence suivante :

$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct } \Leftrightarrow u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

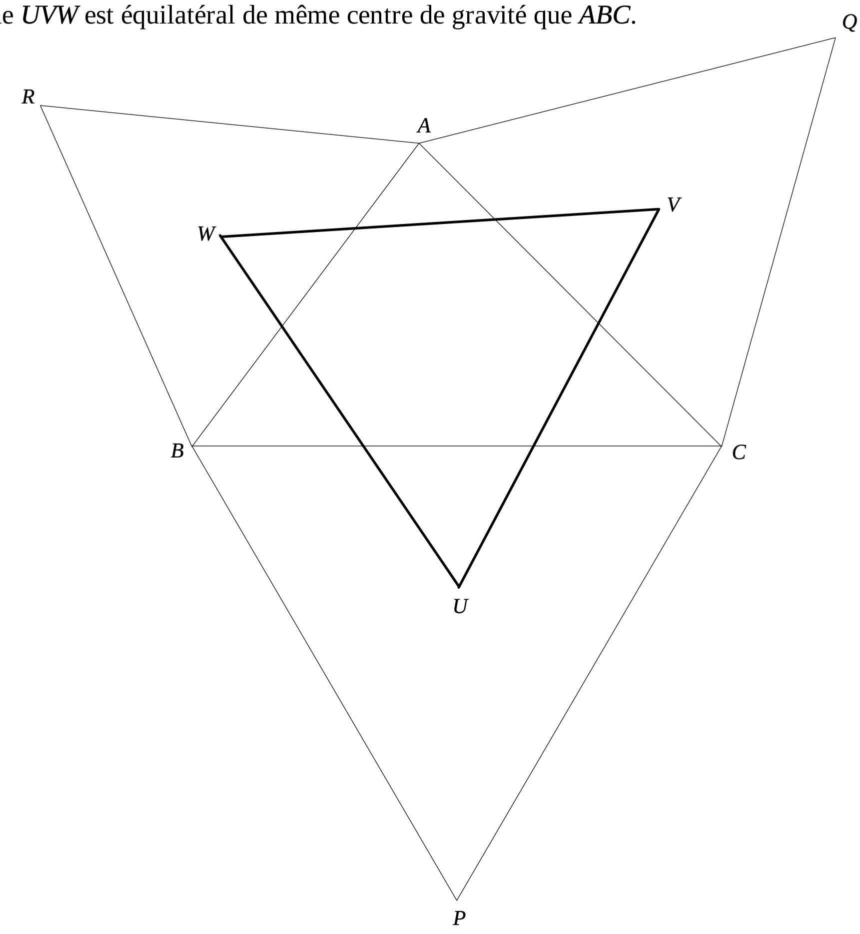
PARTIE B : *démonstration du théorème de Napoléon*

ABC est un triangle quelconque de sens direct.

On construit les points *P*, *Q* et *R* tels que *BPC*, *CQA* et *ARB* soient des triangles équilatéraux de sens direct.

On note *U*, *V* et *W* les centres de gravité de *BPC*, *CQA* et *ARB* respectivement.

Démontrer que *UVW* est équilatéral de même centre de gravité que *ABC*.



PARTIE C : *point de Torricelli*

Démontrer que les droites (*AP*), (*BQ*) et (*CR*) sont concourrantes en un point *T*.

(*T* s'appelle le point de Torricelli du triangle *ABC*)

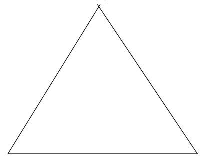
- Solution -

PARTIE A : *des caractérisations du triangle équilatéral*

1. Remarquons au préalable que :

$$-\mathbf{j}^2 = -\mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{3}} = -\mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}\,\mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$$

On a les équivalences suivantes :



UVW est équilatéral de sens direct

U est l'image de *W* par la rotation de centre *V* et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$$u - v = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}(w - v)$$

$$u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

2. On rappelle que : $$1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$$

On a les équivalences suivantes :

UVW est équilatéral de sens direct

$$u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

$$u + (-1 - \mathbf{j}^2)v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

$$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = 0$$

PARTIE B : *démonstration du théorème de Napoléon*

Par hypothèse, on a :

$$a - w = \mathbf{j}(b - w) \quad (E_1)$$

$$b - u = \mathbf{j}(c - u) \quad (E_2)$$

$$c - v = \mathbf{j}(a - v) \quad (E_3)$$

En additionnant, membre à membre, les trois égalités, il vient :

$$a + b + c - (u + v + w) = \mathbf{j}(a + b + c - (u + v + w))$$

D'où : $$a + b + c = u + v + w$$

Ce qui prouve déjà que *UVW* a le même centre de gravité que *ABC*.

De (E_1) on déduit : $$w = \frac{a - \mathbf{j}b}{1 - \mathbf{j}}$$

De même avec (E_2) et (E_3) : $$u = \frac{b - \mathbf{j}c}{1 - \mathbf{j}}$$

$$v = \frac{c - \mathbf{j}a}{1 - \mathbf{j}}$$

On calcule maintenant :

$$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2 w = \frac{a - \mathbf{j}b + \mathbf{j}b - \mathbf{j}^2 c + \mathbf{j}^2 c - a}{1 - \mathbf{j}} = 0$$

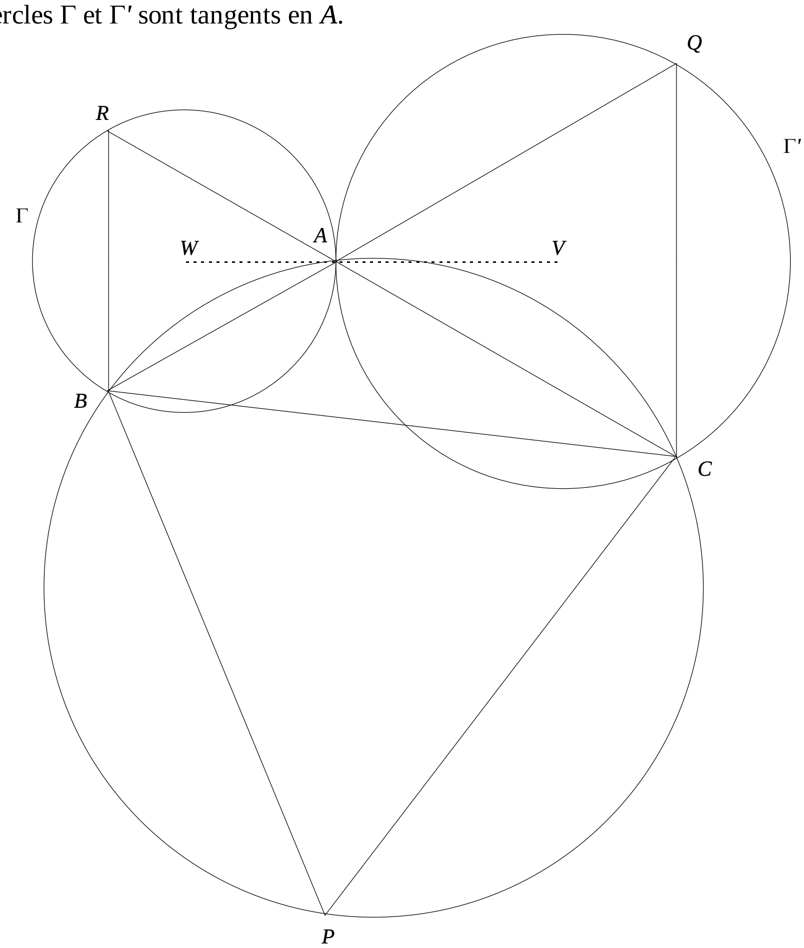
Et d'après la partie A : *UVW* est équilatéral de sens direct

PARTIE C : *point de Torricelli*

Soient Γ et Γ' les cercles circonscrits aux triangles ARB et ACQ respectivement.

Par construction, les cercles Γ et Γ' se coupent déjà en A.

Premier cas : les cercles Γ et Γ' sont tangents en A.



Dans ce cas, l'angle $\left(\overrightarrow{AW}, \overrightarrow{AV}\right)$ est plat. On a alors, en utilisant la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AW}\right) + \left(\overrightarrow{AW}, \overrightarrow{AV}\right) + \left(\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AQ}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AW}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AQ}\right) \ [2\pi]$$

Et puisque les triangles ARB et ACQ sont équilatéraux de sens direct :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AW}\right) = -\frac{\pi}{6} \ [2\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$$

D'où : $$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}\right) = \pi \ [2\pi]$$

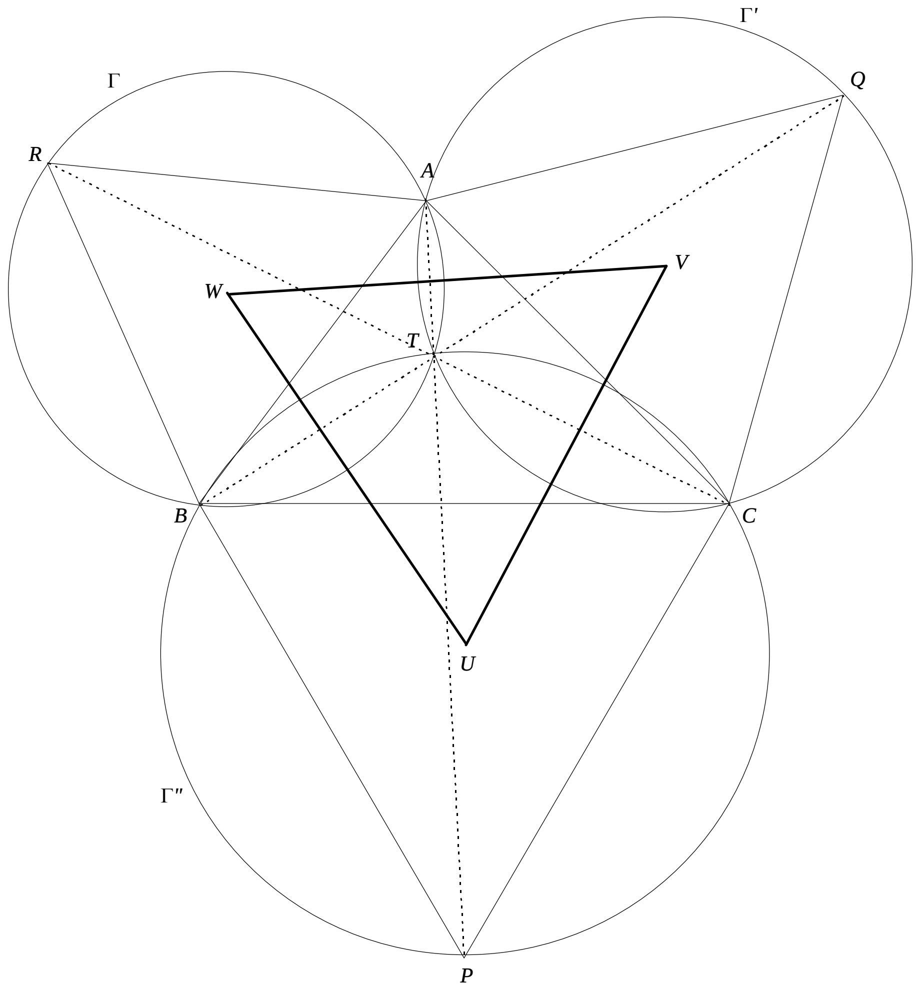
$$A \in (BQ)$$

De même en raisonnant avec $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR}\right)$: $$A \in (CR)$$

Il en découle que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes et dans ce cas on a $T = A$.

Deuxième cas : les cercles Γ et Γ' ne sont pas tangents en A.

Dans ce cas, ils se recoupent en un deuxième point T.



D'après le théorème de l'angle inscrit[1] , on a :

$$\left(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TR}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BR}\right)=\frac{\pi}{3}\ [\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{TQ},\overrightarrow{TA}\right)=\left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{3}\ [\pi]$$

Soit Γ'' le cercle circonscrit à BPC. Montrons que $T \in \Gamma''$:

$$\left(\overrightarrow{TC},\overrightarrow{TB}\right)=\left(\overrightarrow{TC},\overrightarrow{TA}\right)+\left(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}=\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right)\ [\pi]$$

Donc : $T \in \Gamma''$

Les trois cercles Γ, Γ' et Γ'' ont donc un point commun T.

Montrons maintenant que $T \in (AP)$:

$$\left(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TP}\right)=\left(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB}\right)+\left(\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TP}\right)=-\frac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}\right)=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0\ [\pi]$$

Donc : $T \in (AP)$

On montre de même que : $T \in (BQ)$ et $T \in (CR)$

Conclusion : les trois droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en T.

(1) On rappelle que quatre points A, B, C et D non alignés sont cocycliques si et seulement si $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\ [\pi]$