Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \neq b$.

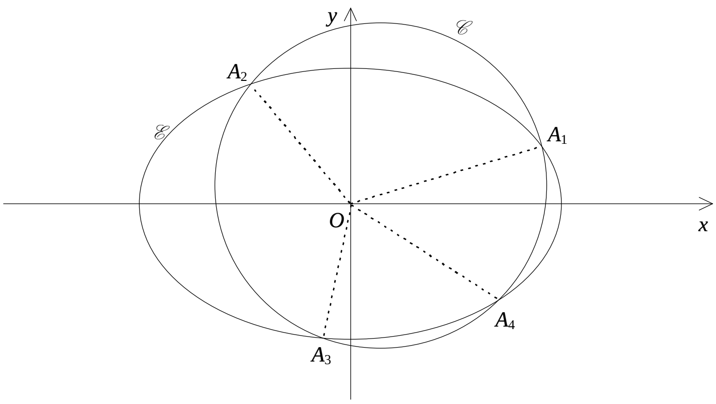
Dans un repère orthonormé, on considère une ellipse $\mathscr{E}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 de cette ellipse de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3 et t_4.

Alors on a :

$$A_1, A_2, A_3 \text{ et } A_4 \text{ cocycliques} \Leftrightarrow t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$$



<u>Démonstration</u> :

<u>Remarque liminaire</u> :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle d'équation : $\quad x^2 + y^2 - 2cx - 2dy - f = 0$

(avec évidemment $c^2 + d^2 + f \geqslant 0$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{E}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ x^2 + y^2 - 2cx - 2dy - f = 0 \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - 2ac\cos t - 2bd\sin t - f = 0 \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ \dfrac{a^2}{4}\left(\mathbf{e}^{2it} + 2 + \mathbf{e}^{-2it}\right) - \dfrac{b^2}{4}\left(\mathbf{e}^{2it} - 2 + \mathbf{e}^{-2it}\right) - ac\left(\mathbf{e}^{it} + \mathbf{e}^{-it}\right) + bd\mathbf{i}\left(\mathbf{e}^{it} - \mathbf{e}^{-it}\right) - f = 0 \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ \dfrac{a^2}{4}\left(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}t} + 2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}t} + 1\right) - \dfrac{b^2}{4}\left(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}t} - 2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}t} + 1\right) - ac\left(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}t} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}\right) + bd\mathbf{i}\left(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}t} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}\right) - f\mathbf{e}^{2\mathbf{i}t} = 0 \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ \dfrac{a^2 - b^2}{4}\mathbf{e}^{4\mathbf{i}t} + (-ac + \mathbf{i}bd)\mathbf{e}^{3\mathbf{i}t} + \left(\dfrac{a^2+b^2}{2} - f\right)\mathbf{e}^{2\mathbf{i}t} + (-ac - \mathbf{i}bd)\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} + \dfrac{a^2-b^2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ P\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}\right) = 0 \end{cases} \text{ où } P = \delta X^4 + (-ac + \mathbf{i}bd)X^3 + \left(\dfrac{a^2+b^2}{2} - f\right)X^2 + (-ac - \mathbf{i}bd)X + \delta \text{ et } \delta = \dfrac{a^2-b^2}{4}$$

<u>Preuve de l'implication "⇒"</u> :

Supposons : A_1, A_2, A_3 et A_4 cocycliques

Alors, il existe un cercle $\mathscr{C}$, d'équation $x^2 + y^2 - 2cx - 2dy - f = 0$, contenant A_1, A_2, A_3 et A_4.

D'après la remarque liminaire, les $\mathbf{e}^{\mathbf{i}t_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ sont des racines de P, donc leur produit est égal à :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4} = (-1)^4\ \frac{\delta}{\delta} = 1$$

D'où : $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$

<u>Preuve de l'implication "⇐"</u> :

On se donne quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 de l'ellipse $\mathscr{E}$ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3 et t_4 tels que :

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

On a donc : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4} = 1$

Nous allons prouver qu'il existe des réels c, d et f tels que les quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 vérifient l'équation $x^2 + y^2 - 2cx - 2dy - f = 0$. Autrement dit (voir remarque liminaire) qu'il existe des réels c, d et f tels que les $\mathbf{e}^{\mathbf{i}t_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ soient des racines du polynôme P.

Notons : $\sigma_1 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4}$

$$\sigma_2 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4}$$

$$\sigma_3 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4}$$

$$\sigma_4 = \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_1}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_3}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}t_4}$$

D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, nous cherchons donc à prouver l'existence de réels c, d et f tels que : $\delta\sigma_1 = (-1)^3(-ac + \mathbf{i}bd) = ac - \mathbf{i}bd$

$$\delta\sigma_2 = (-1)^2\left(\frac{a^2+b^2}{2} - f\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{2} - f\right)$$

$$\delta\sigma_3 = (-1)^1(-ac - \mathbf{i}bd) = ac + \mathbf{i}bd$$

$$\sigma_4 = 1$$

Nous devons donc montrer que le système suivant admet une solution $(c, d, f) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) : \begin{cases} ac - \mathbf{i}bd = \delta\sigma_1 & (E_1) \\ ac + \mathbf{i}bd = \delta\sigma_3 & (E_2) \\ \dfrac{a^2+b^2}{2} - f = \delta\sigma_2 & (E_3) \end{cases}$$

En combinant les deux premières équations, on obtient :

$$c = \frac{\delta(\sigma_1 + \sigma_3)}{2a} \quad \text{et} \quad d = \frac{\delta(\sigma_3 - \sigma_1)}{2\mathbf{i}b}$$

Or : $\sigma_3 = \sigma_4 \overline{\sigma_1}$

Et comme, par hypothèse, $\sigma_4 = 1$, nous obtenons : $\sigma_3 = \overline{\sigma_1}$

D'où : $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$

De même : $\sigma_2 = \sigma_4 \overline{\sigma_2} = \overline{\sigma_2}$

Donc σ_2 est réel et : $f \in \mathbb{R}$

D'après la remarque liminaire, on en déduit :

Conclusion : A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques