

# CALCUL VECTORIEL ET BARYCENTRIQUE

Les résultats établis ci-dessous sont valables aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. Aussi, nous ne précisons pas si les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace (sauf lorsque nous passerons aux coordonnées).

## I) Barycentre de $n$ points pondérés

### 1) Théorème d'existence et d'unicité du barycentre

#### Théorème 1

Soit  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  un système de points pondérés de masse totale  $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

Si  $m \neq 0$  alors il existe un unique point  $G$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$

#### Démonstration :

D'après la relation de Chasles : 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \vec{GA_1} + \vec{A_1A_i} \right)$$

Changeons l'ordre des termes : 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \vec{GA_1} + \vec{A_1A_i} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{A_1A_i}$$

Posons  $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{A_1A_i}$  et factorisons  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_1}$  par  $\vec{GA_1}$  (qui est indépendant de l'indice  $i$ ) :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{A_1A_i} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{GA_1} + \vec{u}$$

D'où finalement, 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = m \vec{GA_1} + \vec{u}$$

Nous avons donc l'équivalence des deux conditions suivantes :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A_1G} = \frac{\vec{u}}{m} \quad (\text{puisque } m \neq 0)$$

Posons  $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{m}$  ; ainsi : 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A_1G} = \vec{v}$$

Or, nous savons qu'étant donné un point  $A_1$  et un vecteur  $\vec{v}$ , il existe un unique point  $G$  tel que  $\vec{A_1G} = \vec{v}$ .

Donc il existe un unique point  $G$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$ .

## 2) Définition

### Définition

Le point  $G$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$  (avec  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ ) s'appelle le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Notations commodes :  $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$  ou  $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

Cas particulier : lorsque  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ , le point  $G$  est appelé isobarycentre (ou centre de gravité) du système  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

### 3) Réduction de la somme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i}$

Soit  $M$  un point quelconque (du plan ou de l'espace)

1<sup>er</sup> cas :  $m \neq 0$  : soit  $G$  le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ . ( $G$  existe car  $m \neq 0$ )

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \vec{MG} + \vec{GA_i} \right) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MG} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MG} \text{ car } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$$

Bilan :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} = m \vec{MG}$$

2<sup>ème</sup> cas :  $m = 0$  : dans ce cas le barycentre  $G$  n'existe pas. Cependant, on a, pour tout point  $N$  :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \vec{MN} + \vec{NA_i} \right) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MN} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{NA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{NA_i} \text{ puisque } \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = 0$$

Bilan :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} \text{ est constant (c'est-à-dire indépendant de } M)$$

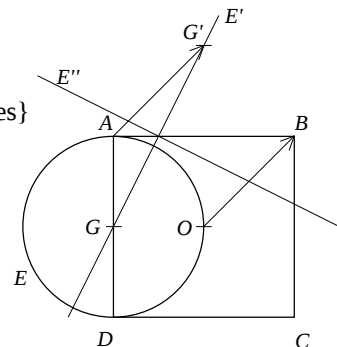
Les résultats précédents sont remarquables dans le sens où ils permettent de réduire une somme de  $n$  vecteurs à *un seul* vecteur, ce qui facilite, par exemple, la recherche de lieux géométriques comme l'illustre l'exercice suivant.

### Exercice (Type BAC)

$ABCD$  est un carré. Déterminer les lieux géométriques suivants :

- 1)  $E = \{M \text{ tels que } \|\vec{2MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|\}$
- 2)  $E' = \{M \text{ tels que } \vec{2MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \text{ et } \vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} \text{ soient colinéaires}\}$
- 3)  $E'' = \{M \text{ tels que } \|\vec{2MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\|\}$

Solution :



$$1) \quad 2 \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 2 \vec{MG} \text{ où } G = \text{bar}\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$$

Déterminons ce point  $G$  :

$$2 \vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} ; 2 \vec{GA} = \vec{AB} - \vec{AC} ; \vec{AG} = \frac{1}{2} (\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2} \vec{BC}.$$

Le point  $G$  est donc le milieu du segment  $[AD]$ .

Déterminons l'ensemble  $E$  : on a les équivalences suivantes :

$$\|2 \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \|2 \vec{MG}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2} AB$$

Conclusion :  $E$  est le cercle de centre  $G$  (milieu de  $[AD]$ ) et de diamètre  $AB = AD$

$$2) \quad \text{Nous avons } \vec{MA} + 2 \vec{MB} - \vec{MC} = 2 \vec{MG}' \text{ où } G' = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, -1)\}$$

Déterminons ce point  $G'$  :

$$\vec{G'A} + 2 \vec{G'B} - \vec{G'C} = \vec{0} ; 2 \vec{G'A} = \vec{AC} - 2 \vec{AB} ; \vec{AG'} = \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{CA}$$

Notons  $O$  le centre de  $ABCD$ . On a ainsi  $\vec{AG'} = \vec{AB} + \vec{OA} = \vec{OB}$ .

Déterminons l'ensemble  $E'$  : on a les équivalences suivantes :

$$2 \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \text{ et } \vec{MA} + 2 \vec{MB} - \vec{MC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow 2 \vec{MG} \text{ et } 2 \vec{MG'} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow M \in (GG')$$

Conclusion :  $E'$  est la droite  $(GG')$

3) On a les équivalences suivantes :

$$\|2 \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2 \vec{MB} - \vec{MC}\| \Leftrightarrow 2MG = 2MG' \Leftrightarrow MG = MG'$$

$E''$  est donc la médiatrice du segment  $[GG']$ .

#### 4) Propriétés

##### a) Homogénéité

Le barycentre reste inchangé si l'on remplace les coefficients par des coefficients proportionnels non nuls.

Démonstration :

Si  $k \neq 0$ , on a les équivalences suivantes :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow k \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n k\alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$$

##### b) Associativité

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple :  $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, 3)\} = \text{bar}\{(G', 3), (C, 3)\}$  où  $G' = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$

Et finalement, on s'aperçoit que  $G$  est le milieu de  $[G'C]$ .

Démonstration :

Soient  $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$  et  $G' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \hline \end{array}$  (où  $p < n$ ).

Notons  $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  et  $m' = \sum_{i=1}^p \alpha_i$ .

On a donc, pour tout point  $M$  du plan  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} = m \vec{MG}$  et  $\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{MA_i} = m' \vec{MG'}$ .

Montrons que  $m' \vec{GG'} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$  : (On en déduira que  $G = \text{bar} \begin{pmatrix} G' & A_{p+1} & \dots & A_n \\ m' & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ )

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{MA_i} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{MA_i}$$

$$m \vec{MG} = m' \vec{MG'} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{MA_i}$$

Pour  $M = G$ , il vient :  $\vec{0} = m' \vec{GG'} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{GA_i}$  C.Q.F.D.

Application :

$ABCD$  est un tétraèdre et  $G = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Situer  $G$ .

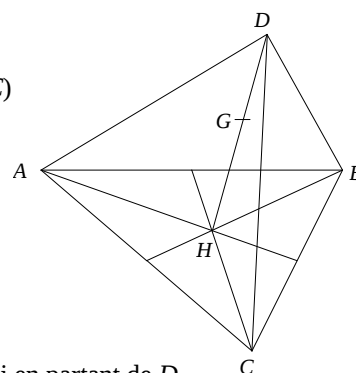
Introduisons le point  $H = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ( $H$  est l'isobarycentre de  $A, B$  et  $C$ )

D'après l'associativité, on a  $G = \text{bar} \begin{pmatrix} H & D \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Donc on a :  $3 \vec{GH} + 4 \vec{GD} = \vec{0}$  ;  $7 \vec{GD} + 3 \vec{DH} = \vec{0}$  d'où  $\vec{DG} = \frac{3}{7} \vec{DH}$

Conclusion :  $G$  est situé sur la médiane issue de  $D$  aux 3 septièmes de celle-ci en partant de  $D$ .

Note : le résultat ci-dessus reste valable même si  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points quelconques du plan.



c) Coordonnées

Lorsque nous avons réduit la somme  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i}$  au paragraphe I)3), nous avons obtenu :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i} = m \vec{MG}$$

Ce résultat étant valable pour tout point  $M$  de l'espace.

Considérons un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et plaçons  $M$  en  $O$ . La relation devient :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} = m \vec{OG} \text{ soit } \vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i}}{m} \quad (*)$$

Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , notons  $(x_i ; y_i ; z_i)$  les coordonnées du point  $A_i$ .

Notons également  $(x_G ; y_G ; z_G)$  les coordonnées de  $G$ .

La relation (\*) est interprétable en termes de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{m} \\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{m} \\ z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{m} \end{array} \right.$$

La troisième coordonnée étant nulle (ou absente) si l'on travaille dans le plan (Oxy).

Retenons ce fait :

*les coordonnées du barycentre  $G$  sont les moyennes pondérées des coordonnées des points du système.*

d) Affixe du barycentre (dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ )

Notons  $z_G$  l'affixe de  $G$  et, pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ,  $z_i$  l'affixe du point  $A_i$ .

En interprétant la relation (\*) en termes d'affixes, on obtient :  $z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{m}$ .

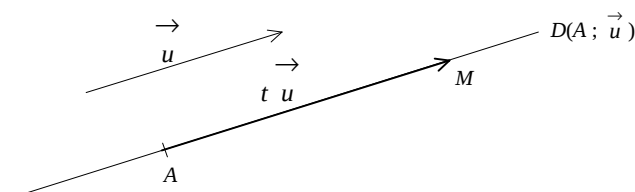
*L'affixe du barycentre  $G$  est la moyenne pondérée des affixes des points du système.*

## II) Représentation paramétrique d'une droite (ainsi que d'une demi-droite ou d'un segment)

### Rappel

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $A$  un point. L'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{AM} = t \vec{u}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) est une droite.

C'est la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$ . (On la note parfois  $D(A ; \vec{u})$ )



Il est important de noter que lorsque le paramètre  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ , le point  $M$  décrit la droite  $D(A ; \vec{u})$ .

Notons  $(x_0 ; y_0 ; z_0)$  les coordonnées de  $A$ ,  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  celles de  $\vec{u}$  et  $(x ; y ; z)$  celles de  $M$ .

La relation  $\vec{AM} = t \vec{u}$  s'écrit alors :

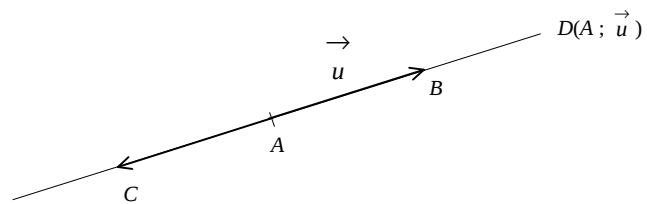
$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

Ce dernier système s'appelle représentation paramétrique de la droite  $D(A; \vec{u})$ .

Exemple :

La droite dont une représentation paramétrique est  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -1 \end{cases}$  est la droite passant par le point  $A(1; 2; -1)$  et de

vecteur directeur  $\vec{u} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ .



Cas des demi-droites et des segments :

On se donne une droite  $D(A; \vec{u})$ .

Soient  $B$  le point tel que  $\vec{AB} = \vec{u}$  et  $C$  le point tel que  $\vec{AC} = -\vec{u}$ .

Pour caractériser la demi-droite  $[AB)$ , on limite les valeurs du paramètre  $t$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Pour caractériser la demi-droite  $[AC)$ , on limite les valeurs du paramètre  $t$  à l'intervalle  $]-\infty; 0]$ .

Pour caractériser le segment  $[AB]$ , on limite les valeurs du paramètre  $t$  à l'intervalle  $[0; 1]$ .

### III) Lien entre le barycentre et les droites, les plans et les segments

Rappelons un théorème fondamental :

#### Théorème 2

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts. On considère le système  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$ .

1. Le barycentre  $G$  de  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$  est situé sur la droite  $(AB)$
2. La droite  $(AB)$  est l'ensemble des barycentres du système  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

Démonstration :

1. Soit  $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ . On vérifie que  $G$  est situé sur  $(AB)$  :

Par définition, on a :  $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$

D'où :  $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$ .

Les vecteurs  $\vec{AG}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires, donc  $G$  est situé sur la droite  $(AB)$ .

2. Soit  $M$  un point quelconque de la droite  $(AB)$ . Montrons que  $M$  est un certain barycentre de  $A$  et  $B$ .

Les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires, donc il existe un réel  $\lambda$  tel que :  $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$ , d'où :

$$(1 - \lambda) \vec{AM} + \lambda \vec{BM} = \vec{0}.$$

Conclusion :  $M = \text{bar}\{(A, 1 - \lambda), (B, \lambda)\}$ . (Car  $1 - \lambda + \lambda \neq 0$ )

Ce théorème s'étend, dans l'espace, à trois points non alignés :

### Théorème 3

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés (et a fortiori distincts deux à deux).

On considère le système  $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .

1. Le barycentre  $G$  de  $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$  est situé dans le plan  $(ABC)$
2. Le plan  $(ABC)$  est l'ensemble des barycentres du système  $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

#### Démonstration :

1. Soit  $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ . On vérifie que  $G$  est situé dans  $(ABC)$  :

D'après I)3), 
$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = m \vec{MG} \quad (\text{où } m = \alpha + \beta + \gamma)$$

En choisissant  $M$  en  $A$ , on a : 
$$\vec{AG} = \frac{\beta}{m} \vec{AB} + \frac{\gamma}{m} \vec{AC} \quad (m \neq 0)$$

Les vecteurs  $\vec{AG}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont coplanaires, donc  $G$  est dans le plan  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$  c'est-à-dire  $(ABC)$ .

2. Soit  $M$  un point quelconque du plan  $(ABC)$ . Montrons que  $M$  est un certain barycentre de  $A, B$  et  $C$ .

Les vecteurs  $\vec{AM}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont coplanaires, donc il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$$

D'où : 
$$\vec{AM} = \lambda \vec{AM} + \lambda \vec{MB} + \mu \vec{AM} + \mu \vec{MC}$$

$$(1 - \lambda - \mu) \vec{AM} + \lambda \vec{BM} + \mu \vec{CM} = \vec{0}$$

Conclusion :  $M = \text{bar}\{(A, 1 - \lambda - \mu), (B, \lambda), (C, \mu)\}$ . (car  $1 - \lambda - \mu + \lambda + \mu = 1$  et  $1 \neq 0$ )

Et pour terminer, donnons le théorème suivant :

### Théorème 4

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts. On considère le système  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même signe, alors :

1. Le barycentre  $G$  de  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$  est situé sur le segment  $[AB]$ .
2. Le segment  $[AB]$  est l'ensemble des barycentres du système  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

#### Démonstration :

Supposons que  $\alpha \neq 0$ . Les relations suivantes sont équivalentes :

$G$  est le barycentre de  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$

Par homogénéité :

$G$  est le barycentre de  $(A, 1)$  et  $(B, \frac{\beta}{\alpha})$

$$\vec{AG} + \frac{\beta}{\alpha} \vec{BG} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha} \vec{GB}$$



Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont du même signe, alors  $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ , donc  $\vec{AG}$  et  $\vec{GB}$  sont de même sens :  $G \in [AB]$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signes opposés, alors  $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ , donc  $\vec{AG}$  et  $\vec{GB}$  sont de sens opposés :  $G \notin [AB]$ .